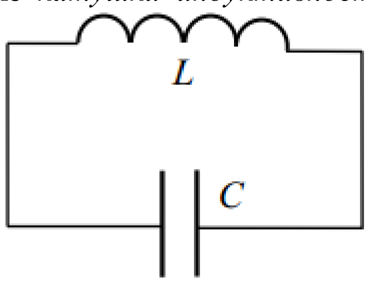
10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Теоретический обзор к занятию «переменный ток».

Изучение колебаний тока в электрических цепях обычно начинают с изучения ***электромагнитных колебаний*** в ***идеальном колебательном контуре*** – цепи, составленной из *катушки индуктивности* и *конденсатора*. Идеальность контура означает отсутствие



сопротивления. В этом случае в нем возникают незатухающие свободные колебания. В самом деле, уравнение, определяющее закон изменения заряда конденсатора

$$U_C + U_L = 0 \Rightarrow \frac{q_C}{C} + L\frac{dI_L}{dt} = 0$$

$$I_L = \frac{dq_C}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 q_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}q_C = 0$$

имеет вид ***уравнения гармонических колебаний***. Соответственно законы изменения заряда и тока в контуре (тока зарядки конденсатора) – гармонические:

$$q(t) = q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$I(t) = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (I_m = \omega q_m).$$

Частота свободных колебаний (ее называют также «***собственной частотой***» колебательного контура) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, а период свободных колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (последнее соотношение называют ***формулой Томсона***). Изучение этих законов очень похоже на изучение кинематики гармонических колебаний в механике.

Пример 1: В идеальном колебательном контуре индуктивность катушки равна $L = 10$мГн, а емкость конденсатора $C = 4$мкФ. В некоторый момент времени заряд конденсатора оказался равен $q_0 = 40$мкКл, а ток в катушке $I_0 = 0{,}2$А (направление тока таково, что заряд конденсатора в этот момент времени растет). Через какое время после этого заряд конденсатора впервые обратится в ноль?

Решение: Гармонические колебания заряда и тока в идеальном контуре описываются выражениями: $q(t) = q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, $I(t) = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$. Поэтому $q_0 = q_m \cdot \cos(\varphi_0)$, $I_0 = -\omega q_m \cdot \sin(\varphi_0)$ (причем I_0 положительно в соответствии с заданным в условии направлением тока). Как видно, $tg(\varphi_0) = -\frac{I_0}{\omega q_0} = -\frac{I_0\sqrt{LC}}{q_0} = -1$. Как видно, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$ (это значение в интервале от 0 до 2π определено однозначно, так как мы знаем, что $\cos(\varphi_0) > 0$ и $\sin(\varphi_0) < 0$). Моменты обращения заряда в ноль определяются из равенства $q(t) = 0 \Rightarrow \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Минимальный положительный корень отвечает $t = \frac{3\pi}{4}\frac{1}{\omega} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{LC} \approx 0{,}47$мс.

Ответ: 0,47.

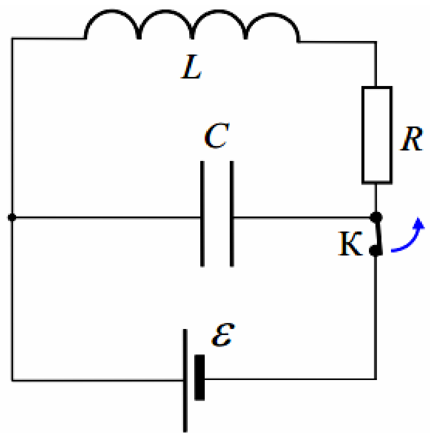
При изучении колебаний в контуре важно понимать **энергетику** электромагнитных колебаний. В процессе незатухающих колебаний энергия магнитного поля в катушке переходит в энергию электрического поля в конденсаторе и обратно. При этом полная энергия колебательного контура остается постоянной:

$$\frac{LI^2}{2}+\frac{q^2}{2C}=const=\frac{LI_m^2}{2}=\frac{q_m^2}{2C}=\frac{CU_m^2}{2}.$$

Последние равенства обращают наше внимание на то обстоятельство, что заряд на конденсаторе (и вместе с ним энергия электрического поля) достигает максимальной величины в тот момент, когда ток (и вместе с ним энергия магнитного поля) равен нулю. В этот момент вся энергия контура собрана в конденсаторе. Напротив, ток максимален по величине, когда заряд обращается в ноль – в этот момент вся энергия контура собрана в катушке.

При появлении сопротивления в контуре колебания становятся **затухающими** (энергия колебаний постепенно уменьшается из-за выделения тепла в сопротивлении). Естественно, выделяющееся тепло можно рассчитать по убыли энергии контура.

Пример 2: В схеме, показанной на рисунке, ключ долгое время был замкнут. Какое количество теплоты выделится в резисторе после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением источника и омическим сопротивлением катушки пренебречь.



Решение: Пока ключ был замкнут, схема перешла в «установившийся» (стационарный) режим, в котором в ветви с катушкой и резистором течет постоянный ток, определяемый из закона Ома для полной цепи: $I_0=\frac{\mathcal{E}}{R}$, напряжение на конденсаторе равно $\mathcal{E}$, и его заряд $q_0=C\mathcal{E}$. После размыкания ключа в контуре начинаются затухающие колебания, в ходе которых вся накопленная энергия $W_0=\frac{q_0^2}{2C}+\frac{LI_0^2}{2}=\left(C+\frac{L}{R^2}\right)\frac{\mathcal{E}^2}{2}$ выделяется в резисторе в виде тепла (излучением и теплотой, выделяющейся в катушке, пренебрегаем). Итак, $Q=\left(C+\frac{L}{R^2}\right)\frac{\mathcal{E}^2}{2}$.

При включении в контур источника периодической ЭДС возникают ***вынужденные колебания***. В общем случае колебания в контуре есть наложение ***свободных колебаний*** (возникающих из-за связи тока в катушке и заряда конденсатора) и вынужденных колебаний. Если в контуре есть потери – выделение тепла в сопротивлении или излучение электромагнитных волн – то свободные колебания, возникшие в момент «включения», постепенно затухают, и на достаточно больших временах «выживают» только вынужденные колебания, поддерживаемые внешним источником.

Установившиеся вынужденные колебания тока в электрической цепи, подключенной к источнику переменного напряжения, называют ***переменным током***, а такие цепи – *цепями переменного тока*.

Важным примером переменного тока является ***синусоидальный*** – ток, меняющийся по закону синуса $I(t)=I_m\sin(\omega t)$. В случае переменного тока понятие «сила тока» требует уточнения –

речь может идти о ***мгновенном значении*** силы тока $I \equiv \frac{dq}{dt} \equiv q'$, о ***среднем значении*** силы тока за время t $\bar{I} \equiv \frac{\Delta q}{t}$ (ясно, например, что среднее значение синусоидального тока за период равно нулю), или о ***действующем значении*** силы тока: так называют величину силы постоянного тока, энергетическое (например, тепловое) действие которого в данном элементе цепи совпадает с действием рассматриваемого переменного.

Пример 3: Найти действующее значение силы тока в резисторе, подключенном к источнику синусоидального напряжения, если амплитуда колебаний тока в этом резисторе равна I_m.

Решение: Действующее значение синусоидального тока в резисторе с сопротивлением R вычисляется по выделению тепла: мгновенное значение мощности тепловых потерь $P(t) = U(t)\cdot I(t) = RI^2(t) = R\cdot I_m^2 \sin^2(\omega t)$, и количество теплоты, выделившееся за период

$$Q_R = \int_0^T R\cdot I_m^2 \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2} I_m^2 RT \equiv \tilde{I}^2 RT \Rightarrow \tilde{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$$

то есть действующее значение синусоидального тока в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитудного значения. Привычное нам напряжение бытовой сети переменного тока 220 В – это действующее значение, так что амплитуда колебаний напряжения в бытовой сети $U_m = \sqrt{2}\cdot 220\text{В} \approx 311\text{В}$.

Рассмотрим колебания в стандартных элементах цепей переменного тока:

Для **резистора**:

$$U_R = U_m \sin(\omega t)$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{U_m}{R}\sin(\omega t) = I_m \sin(\omega t),\ I_m = \frac{U_m}{R},$$

Таким образом, колебания силы тока и напряжения для резистора *синфазны*, и их амплитуды связаны законом Ома.

Для **конденсатора**:

$$U_C = \frac{q_C}{C} = U_m \sin(\omega t)$$

$$I_C = \frac{dq_C}{dt} = CU_m\,\omega\cos(\omega t) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),\ I_m = \omega C\cdot U_m \equiv \frac{U_m}{X_C}$$

(колебания тока «*опережают колебания напряжения по фазе на* $\frac{\pi}{2}$», а величину $X_C \equiv \frac{1}{\omega C}$ часто называют ***емкостным сопротивлением***).

Для **катушки индуктивности**: при протекании переменного тока через катушку в ней создается переменный магнитный поток и наводится ЭДС индукции, и поэтому

$$I_L = I_m \sin(\omega t)$$

$$U_L = -\mathcal{E}_i = L\frac{dI}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t) = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), U_m = \omega L\cdot I_m \equiv X_L\cdot I_m.$$

Как видно, здесь напряжение *опережает ток по фазе на* $\frac{\pi}{2}$, а величину $X_L \equiv \omega L$ называют ***индуктивным сопротивлением***.

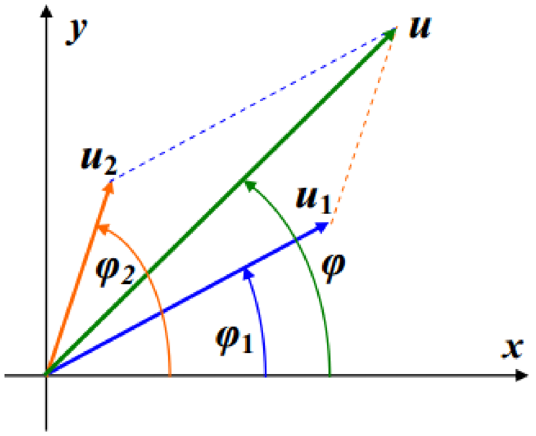
Для изучения вынужденных колебаний тока и напряжения в цепях переменного тока под действием периодической ЭДС надо уметь производить сложение колебаний. Для такой операции можно использовать ***метод фазовых диаграмм***. Рассмотрим процедуру сложения двух колебаний одинаковой частоты $u_1(t) = u_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $u_2(t) = u_2\cos(\omega t + \varphi_1)$. Нам нужно представить суммарное колебание в «стандартном» виде $u(t) = u_1(t) + u_2(t) \equiv u\cos(\omega t + \varphi)$. Выполнив тригонометрическое преобразование с помощью формулы косинуса суммы

$$u_1\cos(\omega t+\varphi_1)+u_2\cos(\omega t+\varphi_2)=\cos(\omega t)[u_1\cos(\varphi_1)+u_2\cos(\varphi_2)]-\sin(\omega t)[u_1\sin(\varphi_1)+u_2\sin(\varphi_2)],$$

и заметив, что $u\cos(\omega t+\varphi)=\cos(\omega t)\cdot u\cos(\varphi)-\sin(\omega t)\cdot u\sin(\varphi)$, приходим к выводу, что амплитуду и фазу суммарного колебания нужно определять из соотношений

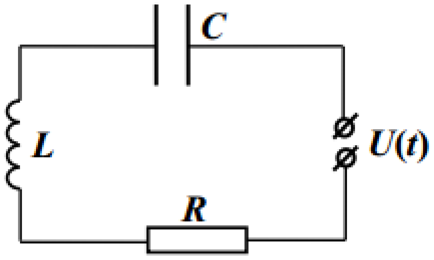
$$\begin{cases} u\cos(\varphi)=u_1\cos(\varphi_1)+u_2\cos(\varphi_2) \\ u\sin(\varphi)=u_1\sin(\varphi_1)+u_2\sin(\varphi_2) \end{cases}.$$

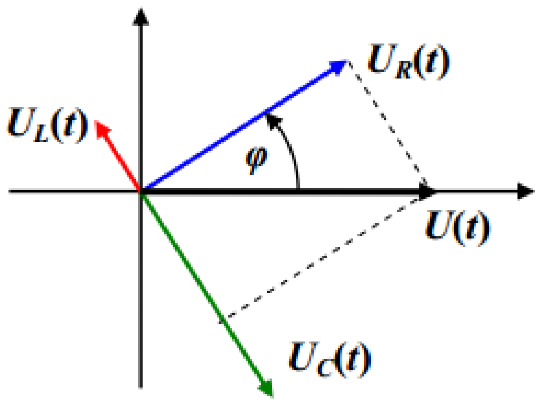
Этим соотношениям можно придать геометрический смысл, если сопоставить каждому гармоническому колебанию заданной частоты **вектор** на координатной плоскости (x,y), длина которого равна амплитуде колебания, а угол, который этот вектор составляет с осью x равен начальной фазе данного колебания. Как нетрудно заметить, сложение векторов приводит в точности к тем же результатам, что и разобранная выше тригонометрическая процедура. Векторному сложению соответствует обычное сложение их проекций, а проекции каждого вектора, отвечающего колебанию $u\cos(\omega t+\varphi)$, равны $u\cos(\varphi)$ и $u\sin(\varphi)$.



Пример 4: Продемонстрируем использование метода векторных диаграмм на примере расчета цепи, в которой к источнику синусоидального напряжения $U(t)=U_m\cos(\omega t)$ подключены последовательно соединенные резистор, конденсатор и катушка индуктивности.

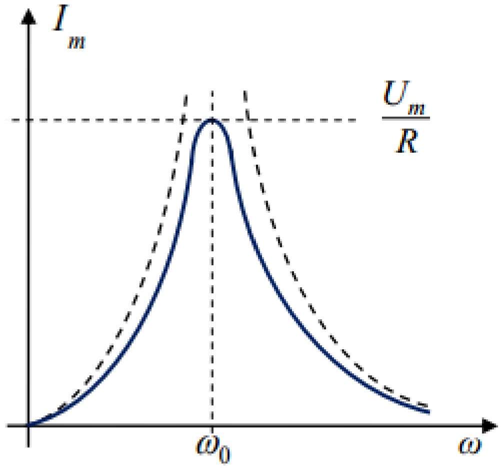
Решение:





В установившемся режиме все колебания напряжений и тока в этой цепи происходят с одинаковой частотой – частотой вынуждающего напряжения $U(t)$. Пусть φ – начальная фаза колебаний тока в этой цепи (фаза колебаний напряжения источника принята за 0, поэтому соответствующий вектор на диаграмме направлен вдоль оси x), а I_m – амплитуда колебаний тока. Вектор, отвечающий колебаниям напряжения на резисторе $U_R(t)$, направлен под углом φ к оси x (напомним, что эти колебания синфазны с колебаниями тока), а его длина равна $U_{Rm}=RI_m$. Колебания напряжения на катушке опережают ток по фазе на $\frac{\pi}{2}$, то есть соответствующий вектор составляет с осью угол $\varphi+\frac{\pi}{2}$. Аналогично колебания напряжения на конденсаторе отстают от колебаний тока по фазе на $\frac{\pi}{2}$. В результате направления векторов, соответствующих колебаниям напряжения на элементах цепи должны быть такими, как показано на диаграмме. Вектора, отвечающие колебаниям $U_L(t)$ и $U_C(t)$, оказались взаимно противоположны, так что модуль их векторной суммы равен $|U_{Lm}-U_{Cm}|=\left|\omega L-\frac{1}{\omega C}\right|I_m$. Этот вектор перпендикулярен вектору колебаний $U_R(t)$, а их сумма должна давать вектор, отвечающий колебаниям напряжения источника. Поэтому из теоремы Пифагора получаем, что

$U_m = \sqrt{(I_m R)^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 I_m^2}$. Таким образом, с помощью построенной диаграммы можно найти закон изменения тока $I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$: его амплитуда $I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$, а начальная фаза находится как угол в том же треугольнике: $tg(\varphi) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega CR}$.



Здесь мы «открываем» явление ***резонанса*** в этой схеме (ее называют «*последовательный колебательный контур*»): зависимость амплитуды силы тока в цепи от частоты переменного напряжения источника имеет вид, показанный на графике. Как видно, при совпадении частоты вынуждающего напряжения и собственной частоты колебаний контура $\omega = \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$ амплитуда вынужденных колебаний тока резко возрастает. В идеальном контуре – при $R = 0$ наша формула формально дает бесконечную амплитуду установившихся колебаний в резонансе. На самом деле это означает, что в отсутствие сопротивления при указанном совпадении частот будет происходить увеличение амплитуды колебаний до тех пор, пока источник может обеспечивать дальнейшее увеличение энергии контура. В реальных схемах амплитуда колебаний в резонансе ограничивается либо наличием ненулевого сопротивления, либо конечностью мощности источника.

Потребляемая контуром мгновенная мощность $P(t) = U(t)I(t)$ может быть записана как $P(t) = U_m I_m \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)$ и с помощью формулы косинуса суммы преобразована к виду $P(t) = U_m I_m \cos(\varphi)\cos^2(\omega t) - U_m I_m \sin(\varphi)\cos(\omega t)\sin(\omega t)$. Усреднение второго слагаемого по времени дает ноль, а среднее значение $\cos^2(\omega t)$ по периоду, как мы видели ранее, равно $\frac{1}{2}$, так что средняя потребляемая мощность равна $P_{cp} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi)$. Ясно, что это общая формула для любой цепи синусоидального тока для заданных амплитуд силы тока и напряжения и заданного сдвига по фазе между ними. В последовательном контуре $\cos(\varphi) = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$, и поэтому $P_{cp} = \dfrac{RU_m^2}{2\left(R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2\right)}$. Обратим внимание, что $P_{cp} = \frac{1}{2} R I_m^2$, так что на самом деле все энергопотребление обеспечивается резистором! Таким образом, катушка и конденсатор являются «*реактивными элементами*» - сами они не потребляют энергию от источника, но, создавая фазовые сдвиги между током и напряжением, влияют на мощность потребления соединенного с ними «*активного элемента*» – резистора.