7-9 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Теоретический обзор к занятию «нелинейные цепи постоянного тока».

Не все элементы цепей постоянного тока подчиняются *закону Ома*, то есть не для всех элементов сила тока через элемент I пропорциональна приложенному напряжению U с постоянным коэффициентом пропорциональности. Такие элементы называют ***нелинейными***. Как видно, для нелинейных элементов сопротивление само является функцией приложенного напряжения: $R \equiv \dfrac{U}{I} \neq const$. Рассмотрим некоторые примеры нелинейных элементов.

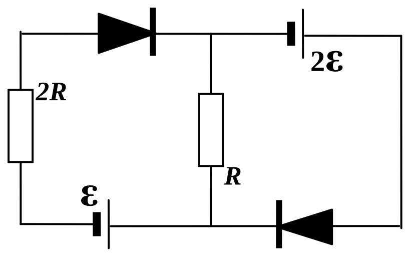
Лампа накаливания: при протекании тока по нити лампы эта нить сильно нагревается – температура нити перестает расти, когда выделяющееся джоулево тепло уравновешивается потерями на теплообмен с окружающей средой (растущий пропорционально разности температур нити и окружающей среды) и на излучение (эти потери растут примерно пропорционально четвертой степени абсолютной температуры нити). Однако при увеличении температуры происходит увеличение удельного сопротивления материала нити (из-за активизации теплового движения атомов решетки) – примерно по линейному закону $\rho = \rho_0 \cdot (1+\alpha t)$, где α называют «температурным коэффициентом сопротивления». В результате при более высоком напряжении равновесный режим устанавливается при более высокой температуре, и поэтому сопротивление нити растет с ростом напряжения. Значит, сила тока через лампу накаливания растет медленнее, чем растет напряжение. Для многих ламп накаливания связь силы тока с напряжением в «рабочей» области приближенно описывается степенной зависимостью $I \approx I_0 \left(\dfrac{U}{U_0}\right)^{\nu}$ с $\nu \approx 0{,}45 \div 0{,}65$.

Полупроводниковый диод: существуют два разных механизма проводимости полупроводников – *электронный* и *дырочный*. Если большая часть электронов в веществе сильно связана с отдельными атомными ядрами, и лишь небольшая часть может перемещаться по всему веществу, то это – электронный («донорный», n) полупроводник. Если все электроны связаны, и, более того, каждый атом способен еще захватить («привязать к себе») электроны, то атомы будут отнимать друг у друга недостающие электроны, и тогда мы будем наблюдать «перемещение» по веществу электронной вакансии в атомной оболочке – *дырки*. В этом случае вещество является дырочным («акцепторным», p) полупроводником. При контакте таких полупроводников (pn-переход) за счет диффузии дырок и электронов на границе раздела возникает слой, создающий разность потенциалов, которая облегчает движение носителей зарядов через область перехода в одном направлении и затрудняет – в другом. Поэтому полупроводниковый диод, составленный из двух слоев полупроводников разных типов, обладает «асимметричной» проводимостью. ***Идеальный диод*** имеет нулевое сопротивление в открытом состоянии и бесконечно большое – в закрытом. У реальных диодов связь силы тока с напряжением более сложная, но также в открытом состоянии сила тока при том же модуле напряжения намного больше и растет намного быстрее, чем в закрытом.

При анализе цепей, содержащих **нелинейные элементы**, мы исходим из тех же уравнений (правила Кирхгофа, закон Ома для линейных элементов, непрерывность тока), но для некоторых элементов используем заданную **нелинейную** связь тока и напряжения. Здесь важно, как именно описаны в условии свойства нелинейного элемента. Обычно эти свойства определяют с помощью задания ***вольт-амперной характеристики*** (**ВАХ**) нелинейного элемента, то есть функции $I = f(U)$, заданной уравнением или графиком.

Один из самых распространенных нелинейных элементов в олимпиадных задачах – идеальный диод (или «слабонеидеальный» диод с заданной ВАХ). В случае идеального диода влияние нелинейности проявляется только в том, что для анализа цепи нам необходимо установить, в каком состоянии находится диод.

Пример 1: Найти ток через резистор $R=10$Ом в схеме, изображенной на рисунке. Диоды идеальны, внутренние сопротивления источников одинаковы и равны $r=2R$, ЭДС батареи в «левой» ветви $\mathcal{E}=12$В, остальные параметры элементов схемы показаны на рисунке.



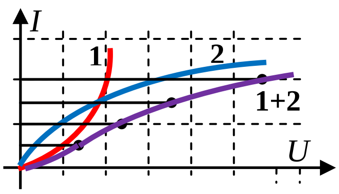
Решение: Тут главная сложность состоит в том, что нам изначально неизвестно состояние диодов. Предположим, что оба диода открыты, и стандартным методом решим задачу для схемы, в которой диоды заменяются на элементы с нулевым сопротивлением. Обозначим искомый ток I (для определенности направим его «снизу вверх»), ток в ветви без резисторов I_1, а ток в ветви с резистором $2R$ – I_2. Тогда уравнение непрерывности тока имеет вид $I_1=I+I_2$, а закон Ома для всех трех ветвей приводит к уравнениям $IR=2\mathcal{E}-I_1 2R=\mathcal{E}+I_2 4R$. Исключаем из этих уравнений $I_1=\dfrac{\mathcal{E}}{R}-\dfrac{I}{2}$ и $I_2=\dfrac{\mathcal{E}}{R}-\dfrac{3I}{2}$, находим: $I=\dfrac{5}{7}\dfrac{\mathcal{E}}{R}$. Однако надо проверить сделанное предположение, поэтому находим $I_1=\dfrac{9}{14}\dfrac{\mathcal{E}}{R}$, $I_2=-\dfrac{1}{14}\dfrac{\mathcal{E}}{R}$. Как видно, предположение не оправдывается: диод во второй ветви должен быть заперт. Убираем разомкнутую «левую» ветвь, и получаем простой контур, ток в котором $I=\dfrac{2\mathcal{E}}{2R+R}=\dfrac{2}{3}\dfrac{\mathcal{E}}{R}=0{,}8$ А.

Если ВАХ нелинейного элемента задана аналитически, то есть приведено конкретное уравнение связи силы тока с напряжением, то мы подставляем его в уравнения баланса напряжений и непрерывности тока.

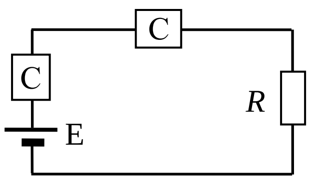
Пример 2: ЭДС источника постоянного напряжения $\mathcal{E}=24$В, а его внутреннее сопротивление $r=3$Ом. К этому источнику подключили, соединив параллельно, резистор с сопротивлением $R=3r=9$Ом и нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого описывается выражением $I(U)=\alpha\cdot\sqrt{U}\equiv\dfrac{1}{r}\sqrt{3\mathcal{E}U}$. Найдите силы токов через резистор и нелинейный элемент в этой схеме.

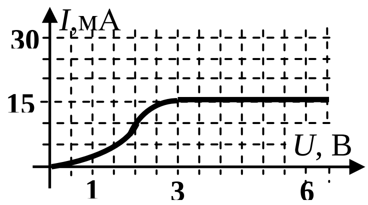
Решение: Напряжения на резисторе и нелинейном элементе равны друг другу и равны напряжению на источнике: $U_{нэ}=U_R\equiv U=\mathcal{E}-Ir$. Сила тока в ветви с источником есть сумма сил токов через нелинейный элемент, который мы находим через уравнение ВАХ, и через резистор, который мы находим по закону Ома: $I=I_{нэ}+I_R=\dfrac{1}{r}\sqrt{3\mathcal{E}U}+\dfrac{U}{3r}$. Подставив это соотношение в выражение для напряжения, получаем уравнение $U=\mathcal{E}-\sqrt{3\mathcal{E}U}-\dfrac{U}{3}$. Его можно решить как квадратное уравнение для переменной $x\equiv\sqrt{\dfrac{U}{\mathcal{E}}}$: $x^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}x-\dfrac{3}{4}=0$. Выбирая положительный корень, получаем, что $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow U=\dfrac{3}{16}\mathcal{E}$. Теперь вычисляем величины сил тока: $I_{нэ}=\dfrac{3\mathcal{E}}{4r}=6$ А и $I_R=\dfrac{\mathcal{E}}{16r}=0{,}5$ А.

Особая ситуация – когда ВАХ нелинейного элемента задается графически. В этом случае и решать возникающие уравнения тоже нужно графически. Вообще следует отметить, что все алгебраические операции (например, описание поведения параллельного или последовательного соединения элементов цепи) можно осуществить графически. Рассмотрим, например, последовательное соединение двух нелинейных элементов, ВАХ которых заданы графиками 1 и 2. Как построить ВАХ всей ветви? Ясно, что при последовательном соединении двух элементов в них течет одинаковый («общий») ток, а общее напряжение есть сумма напряжений на элементах. Поэтому алгоритм построения вольт-амперной характеристики последовательного соединения двух нелинейных элементов может быть следующим: при каждом значении общего тока находим точку, отвечающую общему напряжению – путем суммирования напряжений для этого тока на каждом элементе. Аналогично при параллельном соединении мы должны суммировать токи через элементы при одинаковом значении напряжения на них.

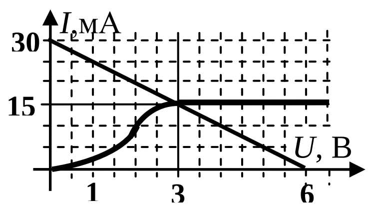


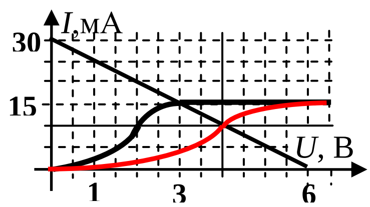
Пример 3: Электронная управляющая схема робота должна потреблять ток $I=(9{,}5\pm1{,}5)$ мА. Входное сопротивление схемы равно $R=195$ Ом. У нас есть аккумулятор с ЭДС $\mathrm{E}=6$ В и внутренним сопротивлением $r=5$ Ом и стабилизаторы тока (С) – элементы, вольтамперная характеристика которых показана на правом рисунке. Каким будет ток, потребляемый схемой, если подключить ее к аккумулятору последовательно с одним стабилизатором? Исправится ли ситуация, если использовать два стабилизатора по схеме, показанной на левом рисунке?





Решение: При подключении к аккумулятору одного стабилизатора последовательно со схемой ток в цепи должен удовлетворять двум уравнениям. Во-первых, он связан с напряжением на стабилизаторе уравнением его вольт-амперной характеристики $I=f(U)$. Во-вторых, напряжение на стабилизаторе совпадает с напряжением на аккумуляторе и схеме, и по закону Ома для участка цепи с ЭДС $U=\mathrm{E}-I(R+r)\Rightarrow I=\dfrac{\mathrm{E}-U}{R+r}$. Эту систему из двух уравнений для двух неизвестных (I и U) можно решить графически. Для этого на графике, на котором построена кривая $I=f(U)$, нужно построить прямую $I=\dfrac{\mathrm{E}-U}{R+r}$. Точка их пересечения и определяет значение неизвестных. Как видно из левого графика, ток в цепи с одним стабилизатором $I_1\approx15$ мА, что не подходит для схемы. Для анализа ситуации в случае с двумя стабилизаторами нужно поступить так же, только нужно искать точку пересечения прямой $I=\dfrac{\mathrm{E}-U}{R+r}$ с вольт-амперной характеристикой последовательного соединения двух стабилизаторов, которая строится по алгоритму, разработанному выше (она построена на правом графике). Из правого графика находим, что в этом случае ток через схему $I_2\approx10$ мА, то есть ситуация действительно «исправится». Впрочем, можно отметить, что точка пересечения лежит на участке «крутого склона» вольт-амперной характеристики пары стабилизаторов, что не очень хорошо: небольшие колебания ЭДС аккумулятора приведут к довольно заметным колебаниям тока в цепи.



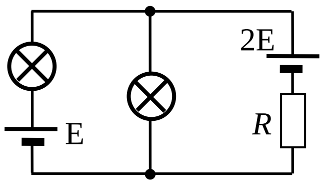


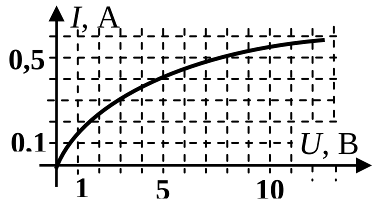
Ответ: исправится: с одним стабилизатором ток потребления схемы $I_1\approx15$ мА, с двумя – $I_2\approx10$ мА.

Отметим, что в этом примере мы увидели общий метод определения режима работы нелинейной цепи, подключенной к источнику напряжения (с ЭДС E и внутренним сопротивлением r). Он всегда определяется пересечением ВАХ этой цепи с «***нагрузочной прямой***» источника – графиком линейной функции $I(U)=\dfrac{\mathrm{E}-U}{r}$.

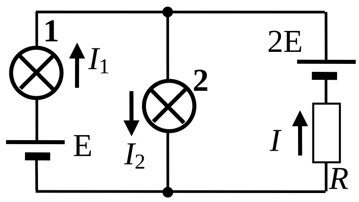
В следующем примере графически решается полная система уравнений для простейшей разветвленной цепи с нелинейным элементом.

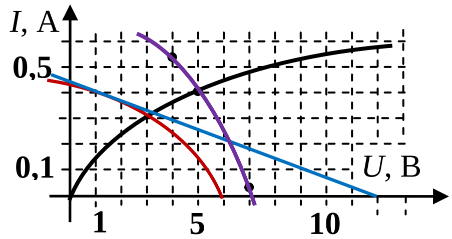
Пример 4: В схеме, показанной на рисунке слева, одинаковые лампы являются нелинейными элементами – их вольтамперная характеристика показана на рисунке справа. Сопротивление резистора $R = 28$Ом, а $\mathrm{E} = 6$ В. Найти суммарную мощность, потребляемую обеими лампами.





Решение: Занумеруем лампы «слева направо». Пусть U_2 – напряжение на второй лампе. Положительные направления токов выбраны так, как показано на рисунке слева. Зависимость силы тока через лампу от напряжения на ней задается некоторой функцией, график которой - это вольтамперная характеристика. Обозначим $I_2 = f(U_2)$. Тогда напряжение на первой лампе





$U_1 = \mathrm{E} - U_2$, и поэтому $I_1 = f(\mathrm{E} - U_2)$. Кроме того, по закону Ома для участка цепи с ЭДС $U_2 = 2\mathrm{E} - IR \Rightarrow I = \dfrac{2\mathrm{E} - U_2}{R}$. Учитывая, что по закону непрерывности тока $I_2 = I + I_1$, получим уравнение для U_2: $f(U_2) = \dfrac{2\mathrm{E}}{R} - \dfrac{U_2}{R} + f(\mathrm{E} - U_2)$. Так как функция f задана нам графически, то и решать это уравнение нужно графически. Для этого построим график прямой $I = \dfrac{2\mathrm{E}}{R} - \dfrac{U}{R}$ (голубая линия), график функции $I = f(\mathrm{E} - U)$ (красная линия – он получается путем переноса начальной почки вольтамперной характеристики лампы по оси абсцисс в точку $U = \mathrm{E}$ и «отражением», то есть заменой знака аргумента), и найдем точку пересечения «суммарного» графика (сиреневая линия) с графиком $I = f(U)$ (см. рисунок). Как видно, $U_2 \approx 5$В и $I_2 \approx 0{,}4$А. Следовательно, мощность, потребляемая второй лампой $P_2 = U_2 I_2 \approx 2$Вт. Поскольку при таком значении напряжения на второй лампе $U_1 = \mathrm{E} - U_2 \approx 1$ В, то в соответствии с вольтамперной характеристикой $I_1 \approx 0{,}14$А, и $P_1 = U_1 I_1 \approx 0{,}14$Вт. Итак, суммарная мощность $P = P_1 + P_2 \approx 2{,}14$Вт.

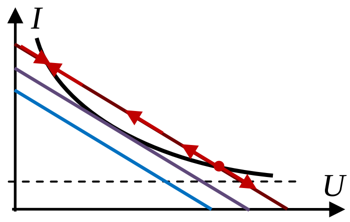
Заметим, что в данном примере демонстрируется «общий» поход к решению нелинейных задач с графическим заданием ВАХ.

Очень внимательного отношения требуют нелинейные элементы, ВАХ которых содержит «***падающие***» участки, на которых ток убывает с ростом напряжения. В этом случае решение уравнений баланса напряжений и непрерывности тока может быть **не единственным**, и нужно выяснить физический статус каждого варианта решения. При этом нужно обращать внимание на устойчивость решения: стационарные состояния цепей постоянного тока, как и положения равновесия в механике, можно классифицировать по их устойчивости: устойчивые решения отвечают стационарным состояниям, в которых небольшие изменения силы тока вызывают процессы, возвращающие цепь в стационарное состояние, а неустойчивые – в которых возникают процессы, увеличивающие эти отклонения.

Пример 5: Вольт-амперная характеристика вольтовой дуги может быть описана выражением $I(U) = I_0 + \dfrac{A}{U}$. Пусть сопротивление цепи поджига дуги (внутреннее сопротивление источника и сопротивление подводящих проводов) равно r, причем $A = 36rI_0^2$. При какой минимальной величине ЭДС источника происходит поджиг вольтовой дуги? Какой при этом является сила тока в дуге? Во сколько раз возрастет ток дуги, если ЭДС источника увеличить в два раза (по сравнению с минимальным)?

Решение:

В этом случае мы как раз имеем ситуацию, в которой ВАХ дуги – «падающая». При



фиксированном значении r графики «нагрузочных прямых» $I(U) = \frac{\mathrm{E} - U}{r}$ – это параллельные прямые, проходящие через точку Е на оси напряжений и точку $\frac{\mathrm{E}}{r}$ на оси силы тока. Нетрудно заметить, что при малой величине ЭДС система уравнений $I(U) = \frac{\mathrm{E} - U}{r}$ и $I(U) = I_0 + \frac{A}{U}$ не имеет решений – дуга не зажигается. Минимальная ЭДС соответствует случаю касания графиков, при котором появляется один корень. Решая уравнение $\frac{\mathrm{E} - U}{r} = I_0 + \frac{36rI_0^2}{U} \Rightarrow U^2 - (\mathrm{E} - rI_0)U + 36r^2I_0^2 = 0$, находим, что возможные корни $U_{1,2} = \frac{\mathrm{E} - rI_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{E} - rI_0}{2}\right)^2 - 36r^2I_0^2}$. Один корень соответствует ситуации, когда $\left(\frac{\mathrm{E} - rI_0}{2}\right)^2 - 36r^2I_0^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{E}_{\min} = 13rI_0$. Соответствующее значение напряжения на дуге $U = 6rI_0$, а сила тока при минимальной ЭДС $I = I_0 + \frac{36rI_0^2}{U} = 7I_0$. При ЭДС, большей минимальной, наше уравнение имеет два корня, и для понимания ситуации необходимо исследовать их на устойчивость. Пусть ток дуги (удовлетворяющий уравнению $I(U) = I_0 + \frac{A}{U}$) в некоторый момент времени отличается от значений, заданных корнями уравнения. Тогда в точках, где ВАХ лежит <u>ниже</u> нагрузочной прямой, сила тока дуги меньше, чем может обеспечить источник, и за счет действия источника сила тока будет <u>расти</u>. Напротив, в точках, где ВАХ <u>выше</u> нагрузочной прямой источник не может поддерживать такой ток, и сила тока будет <u>уменьшаться</u> (на графике направление изменение силы тока в каждой области показано стрелками). Как видно, устойчивым является состояние, в котором ток больше, а напряжение – меньше. Итак, при ЭДС, большей минимальной $U = \frac{\mathrm{E} - rI_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\mathrm{E} - rI_0}{2}\right)^2 - 36r^2I_0^2}$. Для $\mathrm{E} = 2\mathrm{E}_{\min} = 26rI_0$ получаем: $U = \frac{25 - \sqrt{481}}{2}rI_0$. Поэтому $I = \frac{97 - \sqrt{481}}{25 - \sqrt{481}}I_0 \approx 24{,}47 \cdot I_0$. Таким образом, при увеличении ЭДС источника вдвое от минимального значения ток дуги возрастает в $\frac{97 - \sqrt{481}}{7(25 - \sqrt{481})} \approx 3{,}5$ раза.