10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Теоретический обзор к вводному занятию «Колебания».

Важную роль в физике (как в фундаментальной науке, так и в технических приложениях) играет одна из разновидностей движения – *колебательные* движения. Их выделяют по общему характеру изменения положения тела – возвратно-поступательному, при котором тело время от времени изменяет направление своего движения на противоположное. Существует много разновидностей колебаний. Для их классификации обращают внимание на «размах» колебаний (размеры области, в которой происходит движение) и на интервалы времени, в течении которого движение происходит в неизменном направлении. Например, если существует такой интервал времени T, такой, что спустя этот интервал от любого момента времени колеблющееся тело оказывается в той же точке и движется с такой же скоростью (то есть $x(t+T)=x(t)$ и $v_x(t+T)=v_x(t)$), то этот интервал времени называют **периодом** колебаний, а сами колебания – **периодическими**. Часто вместо периода рассматривают другую характеристику колебаний - **частоту**. Это величина, обратная периоду, то есть $\nu \equiv \dfrac{1}{T}$. Единицей измерения частоты в СИ считают герц (Гц), равный обратной секунде. Многие слышали, что частота колебаний напряжения в бытовой сети в России равна 50 Гц. Это означает, что колебания напряжения $U(t)$ – периодические, с периодом 0,02 с. Если колебания тела происходят вокруг некоторой точки (для механических колебаний такой точкой обычно считают положение равновесия тела), то размах колебаний характеризуют **амплитудой**. Так называют максимальное отклонение тела от этой точки. По поведению амплитуды колебания можно поделить на *незатухающие* колебания (амплитуда остается неизменной), *затухающие* колебания (амплитуда убывает) и *нарастающие* колебания (амплитуда растет). В реальных механических системах всегда есть какие-то потери механической энергии (например, за счет действия сил трения), поэтому незатухающие или тем более нарастающие колебания возможны только при поступлении энергии «извне» к колеблющемуся телу. Если потери пренебрежимо малы, то в течении некоторого времени можно наблюдать «практически» незатухающие колебания.

Среди всех колебаний особую роль играют ***гармонические колебания***. Так называют колебания, при которых закон изменения изучаемой величины (например, координаты тела) описывается тригонометрическими функциями синуса или косинуса. Название «гармонические» пришло в теорию колебаний благодаря музыке. Задолго до появления физической теории звука (акустики) музыканты «на слух» выделили набор «чистых» (гармоничных) тонов и построили на их основе различные нотные схемы записи музыки. Позднее было установлено, что «чистые» тона отвечают колебаниям давления в воздухе (или иной среде) как раз по закону синуса или косинуса. Наложением «чистых» тонов друг на друга можно образовать любой звук. Точно так же любое колебание можно описать как наложение некоторого набора гармонических колебаний. Набор частот таких «гармоник» данного колебания называют его *частотным спектром*.

Известно немало механических систем, колебания которых с высокой точностью можно считать гармоническими колебаниями. Например, при гармонических колебаниях материальной точки вдоль одной координатной оси (x) гармонический закон движения записывается в виде:

$$x(t) = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь величина x_m является <u>амплитудой</u> колебаний, $\omega \equiv \dfrac{2\pi}{T}$ – это <u>циклическая</u> <u>частота,</u> связанная с периодом колебаний, а величину, находящуюся в аргументе гармонической функции называют <u>фазой</u> колебаний (φ_0 – «начальная» фаза). При решении задач о гармонических колебаниях важно уметь использовать:

1) кинематические соотношения:

При заданной выше зависимости координаты от времени закон изменения скорости и ускорения имеет вид:

$$v_x(t) = -\omega x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = v_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (v_m = \omega x_m)$$

$$a_x(t) = -\omega^2 x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = a_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) \quad (a_m = \omega^2 x_m)$$

Как видно, амплитуда скорости $v_m = \omega x_m$, и колебания скорости опережают по фазе колебания координаты на $\pi/2$; амплитуда ускорения $a_m = \omega v_m = \omega^2 x_m$, и колебания ускорения происходят в противофазе с колебаниями координаты.

2) уравнение движения:

Для изучения динамики гармонических колебаний в полном объеме необходимо знать понятие *производной* и обладать навыками *дифференцирования*. Поэтому это изучение этого подхода – тема 11 класса. Гармонические колебания возникают в системах, в которых уравнения движения тел, следующие из второго закона Ньютона, приводятся к виду уравнения гармонических колебаний

$$x_t'' + \omega^2 x = 0$$

Здесь x_t'' – *вторая производная* координаты по времени (ускорение тела). Таким образом, это дифференциальное уравнение. В школе не изучают методы решения дифференциальных уравнений, однако в программу 11 класса входит знание решения именно этого уравнения. Замечательное свойство этого уравнения состоит в том, что его решение **всегда** можно записать в виде

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad \textit{или} \quad x(t) = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Более того – вид решения не зависит от того, какова физическая природа величины x (это может быть декартова координата, угол поворота, заряд конденсатора и вообще что угодно). Постоянные величины A и B в этом решении, так же как связанные с ними значения амплитуды x_m и начальной фазы φ_0 обычно определяют из «начальных условий», то есть из значений величины x и ее производной («скорости изменения» x) в начальный момент времени, например, при $t = 0$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x_t'(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ B = v_0/\omega \end{cases},$$

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}, \; \varphi_0 = -\arcsin\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}}\right).$$

Этот способ построения решения корректен даже в том случае, когда движение изучаемой системы вообще не является колебанием! **Всякий раз**, когда уравнение, задающее изменение любой физической величины со временем, принимает вид уравнения гармонических колебаний, можно сделать вывод о том, что в течение некоторого интервала времени эта величина изменяется по гармоническому закону (т.е. по закону синуса или косинуса). В некоторых случаях уравнения можно свести к уравнению колебаний после некоторых преобразований, и тогда подобный вывод тоже будет справедлив. Довольно часто уравнение движения не имеет нужного вида при точной записи, но сводится к нему **приближенно**, в случае малой амплитуды. И в этом случае с той же степенью точности и закон движения можно считать гармоническим.

3) превращения энергии:

Свободные гармонические колебания могут возникать только в системах, в которых отсутствуют диссипативные силы, так как в противном случае колебания будут затухающими. Поэтому в процессе гармонических колебаний полная механическая энергия сохраняется, но происходит постоянный переход ее из одной формы в другую. Например, для груза массы m на пружине жесткостью k кинетическая энергия достигает максимума при прохождении положения равновесия, где потенциальная энергия деформированной пружины обращается в ноль, а в точке максимального отклонения они меняются местами:

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=const=\frac{mv_m^2}{2}=\frac{kx_m^2}{2}$$

(здесь x_m и v_m - амплитудные значения отклонения груза от положения равновесия и его скорости).

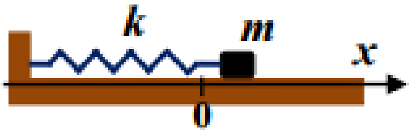
Самый известный пример системы, совершающей гармонические колебания – *пружинный маятник*. Это небольшое тело с массой m, прикрепленное к концу легкой упругой пружины с жесткостью k, другой конец которой закреплен неподвижно, скользящее по гладкой прямой горизонтальной «направляющей». Уравнение движения такого тела удобно записать в проекции на ось x, идущую вдоль направляющей. Если выбрать направление оси так, чтобы оно соответствовало растяжению пружины, и совместить начало отсчета с положением равновесия тела (совпадающим, естественно, с тем положением, в котором пружине не деформирована), то деформация пружины совпадет с x, и по закону Гука сила упругости $F=-kx$. Значит, уравнение движения пружинного маятника сводится к уравнению гармонических колебаний $ma_x=-kx \Rightarrow x_t''+\frac{k}{m}x=0$. Итак, пружинный маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

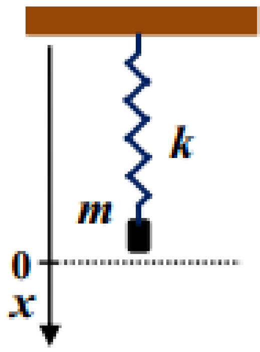
Пример 1: Груз пружинного маятника стартует из положения, в котором пружина растянута на Δl_0, со скоростью v_0. Какова будет амплитуда колебаний груза?

Решение: Здесь проще анализировать не движение, а превращения энергии. В ходе колебаний пружинного маятника сохраняется полная механическая энергия, равная сумме кинетической энергии груза и потенциальной энергии деформированной пружины $\frac{mv_x^2}{2}+\frac{k(\Delta l)^2}{2}=E=const$. Величину полной энергии можно вычислить по начальным условиям $E=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{k(\Delta l_0)^2}{2}$. В момент максимального растяжения (или сжатия) пружины скорость обращается в ноль, поэтому $\frac{mv_0^2}{2}+\frac{k(\Delta l_0)^2}{2}=\frac{k(\Delta l_m)^2}{2}$. Так как положению равновесия отвечает $\Delta l=0$, то максимальное отклонение от него – это и есть величина максимальной деформации пружины. Итак, $x_m=|\Delta l_m|=\sqrt{(\Delta l_0)^2+\frac{m}{k}v_0^2}$.

Пример 2: Найдите период вертикальных колебаний небольшого груза массы m, подвешенного на легкой пружине с жесткостью k в однородном поле тяжести g. Сопротивлением воздуха пренебречь.

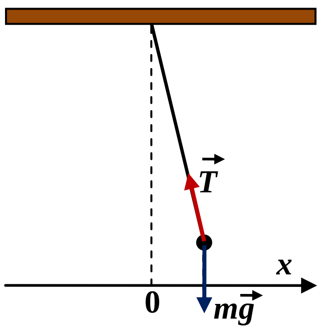
Решение: Запишем сначала уравнение движения пружинного маятника в проекцию на координатную ось x, направленную вдоль направляющей (см. рисунок слева): $ma_x=-k\cdot\Delta l$ (здесь мы учли, что при растянутой пружине ($\Delta l>0$) сила упругости будет направлена против оси x, а при сжатой пружине ($\Delta l<0$) – по этой оси). Если отсчитывать координату от положения равновесия ($\Delta l=0$), то $\Delta l=x$, и уравнение движения груза принимает вид $ma_x=-k\cdot x$. Теперь рассмотрим вертикальные колебания подвешенного груза (рисунок справа): $ma_x=mg-k\cdot\Delta l$. На первый взгляд, оно не совпадает с уравнение движения пружинного маятника. Но нам важно обратить внимание, что теперь положение равновесия отвечает не $\Delta l=0$, а растянутой пружине, сила упругости которой уравновешивает силу тяжести груза: $\Delta l_p=+\frac{mg}{k}$. Если снова отсчитывать координату **от положения равновесия**, то $\Delta l=\Delta l_p+x=\frac{mg}{k}+x$. Значит, уравнение движения $ma_x=-k\cdot x$ в точности совпадает с уравнением движения пружинного маятника. То есть при совпадении начальных условий законы движения у них тоже совпадут! Груз пружинного маятника при любых начальных условиях совершает гармонические колебания с периодом





$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Следовательно, и подвешенный на легкой пружине груз совершает гармонические колебания с тем же периодом $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Другой пример системы, совершающей гармонические колебания – ***математический маятник***. Так называют маленький массивный груз, подвешенный на легкой нерастяжимой нити длиной l в однородном поле тяжести g. Ясно, что положение равновесия такого груза соответствует вертикальному положению нити. Если следить за изменением положения груза



в проекции на горизонтальную ось (см. рисунок), то уравнение движения записывается в виде $ma_x = T_x = -T\sin(\varphi)$, где φ – угол отклонения нити от вертикали. Ясно, что $\sin(\varphi)=\frac{x}{l}$ и что $T = mg\cos(\varphi)+m\frac{v^2}{l}$. Поэтому уравнение движения здесь гораздо более сложное: $a_x=-g\frac{x}{l}\left[\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{l}+\frac{v^2}{gl}\right]$. Однако при ***малых углах отклонениях*** от положения равновесия $x<<l$, и $v^2<<gl$, поэтому $a_x\approx -g\frac{x}{l}$.

Можно это уравнение переписать в виде $x''_t+\frac{g}{l}x\approx 0$. Значит, колебания математического маятника при малых углах отклонения с высокой точностью являются гармоническими колебаниями с периодом $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

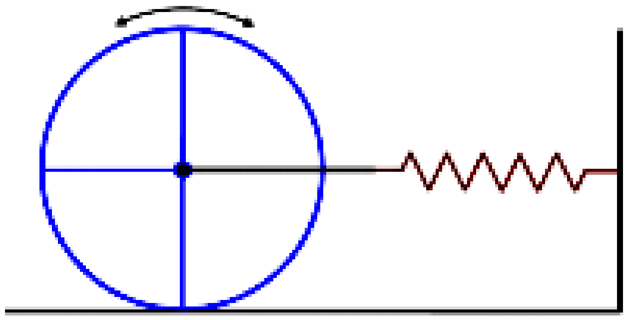
Пример 3: Каким образом можно изготовить «секундомер» для измерения небольших интервалов времени (в диапазоне 5 – 15 секунд) из шелковой нити и кусочка пластилина? Ускорение свободного падения считать равным $g\approx 9{,}8$ м/с^2.

Решение: Подвесим кусочек пластилина на отрезке нити, изготовив таким образом математический маятник. Длину отрезка нити подберем таким образом, чтобы период колебаний маятника равнялся 1 с. Поскольку $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, то $l_1=\frac{gT^2}{4\pi^2}\approx 24{,}8$ см. Запуская колебания одновременно с началом отсчета времени, считаем периоды колебаний. Конечно, колебания будут затухать, но на 15 периодов при аккуратно изготовленном маятнике такого «секундомера» о хватает. На практике более удобно изготовить не «секундный», а «двухсекундный» маятник с длиной отрезка нити $l_2\approx 99{,}3$ см, и отсчитывать секунды «полупериодами». Такой «секундомер» работает стабильнее и его хватает на большее время.

Наиболее характерные задачи, посвященные гармоническим колебаниям в механике – это задачи на определение циклической частоты (периода) колебаний, задачи на анализ закона гармонического движения, задачи об определении амплитуды координаты или скорости колебаний (**пример 1**) и задачи об определении пределов гармоничности колебаний.
Рассмотрим каждый тип задач.
Нахождение периода или частоты колебаний производится одним из двух методов – приведением уравнения движения к виду уравнения гармонических колебаний (**пример 2** и изучение математического маятника) или с помощью закона сохранения энергии. В

последнем случае мы используем тот факт, что при гармонических колебаниях максимумы кинетической и потенциальной энергии (если нулем потенциальной считать ее значение в положении равновесия) совпадают, а амплитуды смещения и скорости связаны как раз через циклическую частоту. Например, для пружинного маятника эти соотношения дают $\frac{mv_m^2}{2}=\frac{k\,x_m^2}{2}$ и $v_m=\omega x_m$, и после подстановки амплитуды скорости из второго уравнения в первое получается $\frac{m\omega^2 x_m^2}{2}=\frac{k\,x_m^2}{2}$, то есть $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. Мы снова – другим способом – обнаружили, что у пружинного маятника $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Этот метод наиболее хорош тогда, когда для рассматриваемой системы записать уравнения движения на школьном уровне очень сложно – например, для вращательного движения.

Пример 4: Тяжелый тонкостенный цилиндрический валик массы $m=800$ г лежит на шероховатой горизонтальной поверхности. С помощью легких спиц и втулки валик насажен на легкую ось, вокруг которой он может вращаться без трения. Посредством легких жестких скоб ось прикреплена к концу невесомой пружины жесткостью $k=10$ Н/м, второй конец которой закреплен (см. рисунок). Таким образом, валик может совершать плоское колебательное движение, не проскальзывая по поверхности. Чему равен период малых колебаний валика?



Решение: Кинетическая энергия системы состоит из энергий поступательного и вращательного движения валика: $E_K=\frac{mv^2}{2}+\frac{m(\omega R)^2}{2}$, где v – скорость центра масс валика, ω и R – угловая скорость вращения вокруг оси валика и его радиус соответственно (здесь учтено, что валик тонкостенный, и поэтому скорость вращения всех его массивных частей одинакова). Так как проскальзывание отсутствует, то $\omega R=v$, и $E_K=mv^2$. Потенциальная энергия – это энергия сжатой пружины: $U=\frac{k\,x^2}{2}$, где x – смещение оси валика от положения равновесия. Так как зависимости квадратичны, то колебания валика будут гармоническими, и поэтому

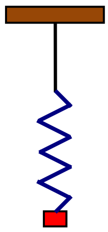
$$\left\{\begin{matrix} mv_{\max}^2=\frac{k\,x_{\max}^2}{2} \\ v_{\max}=\omega x_{\max} \end{matrix}\right\}\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{2m}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}\approx 2{,}51\text{с}.$$

Рассмотрим пример задачи на анализ гармонического движения.

Пример 5: Координата груза пружинного маятника, отсчитываемого от положения равновесия, в некоторый момент времени равнялась $x_0=20$см, а спустя $t_1=2$с (в течении которых груз двигался в одном направлении) достигла амплитудного значения $x_m=40$см. С какой скоростью будет двигаться груз спустя время $t_2=3$с после этого?

Решение: Запишем закон движения груза в виде $x(t)=x_m\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$, и будем считать начальный момент времени моментом $t=0$. Тогда $x(t_1)=x_m=x_m\cdot\cos(\omega t_1+\varphi_0)$, то есть $\omega t_1+\varphi_0=0$, и поэтому следует положить $\varphi_0=-\omega t_1$. Теперь для $t=0$ получаем: $x_0=x_m\cdot\cos(\varphi_0)=x_m\cdot\cos(-\omega t_1)$. Значит, $\cos(-\omega t_1)=\frac{x_0}{x_m}=\frac{1}{2}$, и, поскольку два момента времени должны быть разнесены менее чем на четверть периода (значения координаты положительны и движение происходит в одну сторону), то $\omega t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$. Следовательно, период колебаний $T = 6t_1 = 12\text{c}$. Мы приходим к выводу, что $t_2 = \frac{T}{4} \Rightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{2}$. Закон изменения скорости груза $v_x(t) = -\omega x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -\frac{\pi x_m}{3t_1}\sin[\omega(t - t_1)]$. Окончательно: искомая скорость $v_x(t_1 + t_2) = -\frac{\pi x_m}{3t_1}\sin[\omega t_2] = -\frac{\pi x_m}{3t_1} \approx -21$ см/с. Видно, что к этому моменту груз движется против направления оси x.

Ограничение области гармоничности колебаний обычно возникает в системах, где действие



возвращающих сил передается через связи. Рассмотрим в качестве примера «обычное» вертикальное колебание груза на пружине, но прикрепим груз к пружине отрезком невесомой нерастяжимой нити.

Пока нить натянута, она «передает» действие силы упругости на груз:

$$\left.\begin{aligned} m a_x &= mg - T \\ T = F_{упр} &= k\left(\frac{mg}{k} + x\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x''_t + \frac{k}{m}x = 0.$$

(координатная ось направлена вниз, координата x отсчитывается от положения равновесия, в котором пружина растянута на $\Delta l_0 = mg/k$). Поэтому груз совершает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Но если ускорение груза достигнет значения $a_x^{(кр)} = g$, то сила натяжения нити обращается в ноль – нить провисает. Конечно же, подвешенный на нити груз не может иметь в проекции на ось, направленную вертикально вниз, ускорение больше g. Таким образом, если отвести груз вниз от положения равновесия на расстояние $x_m > \Delta l_0 = mg/k$ и отпустить без начальной скорости, то закон движения груза будет гармоническим только до достижения точки $x_1 = -mg/k$. При дальнейшем продвижении груза вверх нить провиснет, и груз будет двигаться под действием одной только силы тяжести, то есть с ускорением g - до тех пор, пока груз не вернется в эту точку и нить снова не натянется. Конечно, движение груза все равно будет иметь характер колебаний, но эти колебания уже не будут гармоническими, так как внутри каждого периода будет участок движения с постоянным ускорением. В этом смысле $x_m = mg/k$ есть максимально возможная амплитуда гармонических колебаний для данной системы.

Из этого примера можно сделать общий вывод, что нарушение гармоничности колебаний в подобных системах связано с разрушением связей между телами, то есть:

- с провисанием нитей,
- с отрывом соприкасающихся поверхностей тел,
- с началом проскальзывания соприкасающихся тел друг по другу (ясно, что любое скольжение негладких поверхностей в системе уничтожает гармоничность свободных колебаний, так как из-за перехода механической энергии в тепло колебания становятся затухающими).

Поэтому при анализе колебаний системы, в которой в передаче возвращающей силы к телам участвуют связи, в первую очередь надо понять, какие из связей могут перестать действовать и при каких условиях.