7-9 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Теоретический обзор к вводному занятию «Колебания и волны».

Важную роль в физике (как в фундаментальной науке, так и в технических приложениях) играет одна из разновидностей движения – *колебательные* движения. Их выделяют по общему характеру изменения положения тела – возвратно-поступательному, при котором тело время от времени изменяет направление своего движения на противоположное. Существует много разновидностей колебаний. Для их классификации обращают внимание на «размах» колебаний (размеры области, в которой происходит движение) и на интервалы времени, в течении которого движение происходит в неизменном направлении. Например, если существует такой интервал времени T, такой, что спустя этот интервал от любого момента времени колеблющееся тело оказывается в той же точке и движется с такой же скоростью (то есть $x(t+T)=x(t)$ и $v_x(t+T)=v_x(t)$), то этот интервал времени называют **периодом** колебаний, а сами колебания – **периодическими**. Часто вместо периода рассматривают другую характеристику колебаний - **частоту**. Это величина, обратная периоду, то есть $\nu \equiv \frac{1}{T}$. Единицей измерения частоты в СИ считают герц (Гц), равный обратной секунде. Многие слышали, что частота колебаний напряжения в бытовой сети в России равна 50 Гц. Это означает, что колебания напряжения $U(t)$ – периодические, с периодом 0,02 с. Если колебания тела происходят вокруг некоторой точки (для механических колебаний такой точкой обычно считают положение равновесия тела), то размах колебаний характеризуют **амплитудой**. Так называют максимальное отклонение тела от этой точки. По поведению амплитуды колебания можно поделить на *незатухающие* колебания (амплитуда остается неизменной), *затухающие* колебания (амплитуда убывает) и *нарастающие* колебания (амплитуда растет). В реальных механических системах всегда есть какие-то потери механической энергии (например, за счет действия сил трения), поэтому незатухающие или тем более нарастающие колебания возможны только при поступлении энергии «извне» к колеблющемуся телу. Если потери пренебрежимо малы, то в течении некоторого времени можно наблюдать «практически» незатухающие колебания.

Среди всех колебаний особую роль играют ***гармонические колебания***. Так называют колебания, при которых закон изменения изучаемой величины (например, координаты тела) описывается тригонометрическими функциями синуса или косинуса – в общем случае это выражение вида

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \qquad (1)$$

в котором A и B – некоторые постоянные. Алгебраическими преобразованиями (1) можно привести к другому виду: если вынести за скобки множитель, равный $\sqrt{A^2+B^2}$: $x(t)=\sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\omega t)+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\omega t)\right]$, можно заметить, что $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ и $-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – числа, сумма квадратов которых равна 1. Поэтому их можно считать косинусом и синусом некоторого числа φ_0, и тогда вместо (1) получаем

$$x(t) = x_m\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (2)$$

где $x_m \equiv \sqrt{A^2+B^2}$. (1) и (2) – две разные, но эквивалентные формы записи закона гармонических колебаний. Поскольку размах колебаний синуса и косинуса не изменяется, и они являются периодическими функциями с периодом 2π, то гармонические колебания – это незатухающие периодические колебания с периодом $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Величина $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\cdot\nu$ называется *циклической частотой* колебаний. Как видно, колебания происходят вокруг точки $x = 0$, x_m – это амплитуда колебаний. Величину $\varphi(t) \equiv \omega t + \varphi_0$ в формуле (2) часто называют ***фазой*** колебаний (а φ_0 – ***начальной фазой***).

Можно подметить важное свойство гармонических колебаний: когда тело находится на максимальном удалении от положения равновесия ($x = \pm x_m$), то оно на мгновение «замирает», и его скорость обращается в ноль. А в момент прохождения положения равновесия ($x = 0$) тело движется быстрее всего – его скорость достигает своего максимума $v_x = \pm v_m$. На самом деле закону колебаний (2) отвечает закон изменения скорости $v_x(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$. Таким образом, скорость тоже совершает гармонические колебания с тем же периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ и амплитудой $v_m = \omega x_m$.

Название «гармонические» пришло в теорию колебаний благодаря музыке. Задолго до появления физической теории звука (акустики) музыканты «на слух» выделили набор «чистых» (гармоничных) тонов и построили на их основе различные нотные схемы записи музыки. Позднее было установлено, что «чистые» тона отвечают колебаниям давления в воздухе (или иной среде) как раз по закону синуса или косинуса. Наложением «чистых» тонов друг на друга можно образовать любой звук. Точно так же любое колебание можно описать как наложение некоторого набора гармонических колебаний. Набор частот таких «гармоник» данного колебания называют его *частотным спектром*.

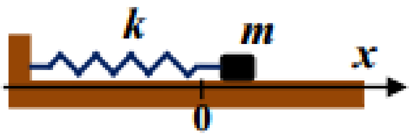
Известно немало механических систем, колебания которых с высокой точностью можно считать гармоническими колебаниями.

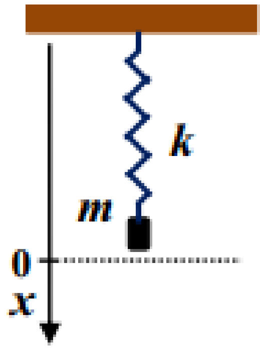
Пример 1: Известно, что *пружинный маятник* (небольшое тело с массой m, прикрепленное к концу легкой упругой пружины с жесткостью k, другой конец которой закреплен неподвижно, скользящее по гладкой прямой «направляющей»), совершает гармоническое колебание с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Амплитуда этих колебаний определяется *начальными условиями* (начальным отклонением от положения равновесия, в котором пружина не деформирована, и начальной скоростью). Допустим, что груз стартует из положения, в котором пружина растянута на Δl_0, со скоростью v_0. Какова будет амплитуда колебаний груза?

Решение: Для реальной системы здесь проще анализировать не движение, а превращения энергии. В ходе колебаний пружинного маятника сохраняется полная механическая энергия, равная сумме кинетической энергии груза и потенциальной энергии деформированной пружины $\dfrac{mv_x^2}{2} + \dfrac{k(\Delta l)^2}{2} = E = const$. Величину полной энергии можно вычислить по начальным условиям $E = \dfrac{mv_0^2}{2} + \dfrac{k(\Delta l_0)^2}{2}$. В момент максимального растяжения (или сжатия) пружины скорость обращается в ноль, поэтому $\dfrac{mv_0^2}{2} + \dfrac{k(\Delta l_0)^2}{2} = \dfrac{k(\Delta l_m)^2}{2}$. Так как положению равновесия отвечает $\Delta l = 0$, то максимальное отклонение от него – это и есть величина максимальной деформации пружины. Итак, $x_m = |\Delta l_m| = \sqrt{(\Delta l_0)^2 + \dfrac{m}{k}v_0^2}$.

Пример 2: Найдите период вертикальных колебаний небольшого груза массы m, подвешенного на легкой пружине с жесткостью k в однородном поле тяжести g. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение: Запишем сначала уравнение движения пружинного маятника в проекцию на координатную ось x, направленную вдоль направляющей (см. рисунок слева): $ma_x = -k \cdot \Delta l$ (здесь мы учли, что при растянутой пружине ($\Delta l > 0$) сила упругости будет направлена против оси x, а при сжатой пружине ($\Delta l < 0$) – по этой оси). Если отсчитывать координату от положения равновесия ($\Delta l = 0$), то $\Delta l = x$, и уравнение движения груза принимает вид $ma_x = -k \cdot x$. Теперь рассмотрим вертикальные колебания подвешенного груза (рисунок справа): $ma_x = mg - k \cdot \Delta l$. На первый взгляд, оно не совпадает с уравнение движения пружинного маятника. Но нам важно обратить внимание, что теперь положение равновесия отвечает не $\Delta l = 0$, а растянутой пружине, сила упругости которой уравновешивает силу тяжести груза: $\Delta l_p = +\dfrac{mg}{k}$. Если снова отсчитывать координату от положения равновесия, то $\Delta l = \Delta l_p + x = \dfrac{mg}{k} + x$. Значит, уравнение движения $ma_x = -k \cdot x$ в точности совпадает с уравнением движения пружинного маятника. То есть в точках с одинаковыми координатами подвешенный груз и груз пружинного маятника испытывают одинаковые ускорения, и при совпадении начальных условий законы движения у них тоже совпадут! Груз математического маятника при любых начальных условиях совершает гармонические колебания с периодом





$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Следовательно, и подвешенный на легкой пружине груз совершает гармонические колебания с тем же периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Другой пример системы, совершающей гармонические колебания – ***математический маятник***. Так называют маленький массивный груз, подвешенный на легкой нерастяжимой нити длиной l в однородном поле тяжести g. Ясно, что положение равновесия такого груза соответствует вертикальному положению нити. При ***малых углах отклонениях*** от положения равновесия колебания математического маятника с высокой точностью являются гармоническими колебаниями с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Пример 3: Каким образом можно изготовить «секундомер» для измерения небольших интервалов времени (в диапазоне 5 – 15 секунд) из шелковой нити и кусочка пластилина? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

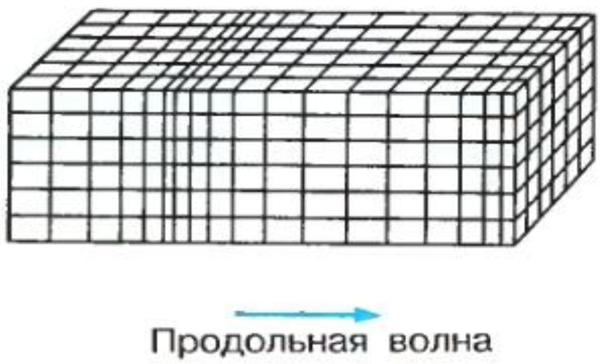
Решение: Подвесим кусочек пластилина на отрезке нити, изготовив таким образом математический маятник. Длину отрезка нити подберем таким образом, чтобы период колебаний маятника равнялся 1 с. Поскольку $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, то $l_1 = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} \approx 24{,}8$ см. Запуская колебания одновременно с началом отсчета времени, считаем периоды колебаний. Конечно, колебания будут затухать, но на 15 периодов при аккуратно изготовленном маятнике такого «секундомера» о хватает. На практике более удобно изготовить не «секундный», а «двухсекундный» маятник с длиной отрезка нити $l_2 \approx 99{,}3$ см, и отсчитывать секунды «полупериодами». Такой «секундомер» работает стабильнее и его хватает на большее время.

В некоторых ситуациях мы можем столкнуться с явлениями, в которых колебания какой-либо величины происходят не в ограниченной области пространства, а с течением времени *распространяются* в пространстве. В этом случае мы говорим о ***волновых явлениях***. Как и в случае колебаний, можно выделить волны, в которых рассматриваемая величина (например, отклонение поверхности жидкости от «равновесного» уровня по вертикали) в выбранной точке наблюдения изменяется периодически. Такую волну тоже можно охарактеризовать периодом T, частотой $\nu \equiv \dfrac{1}{T}$ или циклической частотой $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu$ колебаний. Точно так же сложную по форме волну можно разложить на гармонические составляющие.

Гармоническую волну с колебаниями величины u, распространяющимися в одном направлении (вдоль оси x) можно описать выражением $u(t,x) = u_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$. Точно так же, как при гармонических колебаниях, мы обнаруживаем здесь амплитуду (u_m) и фазу ($\varphi(t) \equiv \omega t - kx + \varphi_0$) волны. Величину k обычно называют *волновым числом* для такой волны. Можно заметить и отличия: волна является периодической функцией не только в зависимости от времени, но и в зависимости от координаты: «период» изменения профиля волны в фиксированный момент времени $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$. Например, у гармонической волны на поверхности воды расстояние между соседними гребнями (в направлении распространения) будет постоянно и равно λ. Эту величину называют ***длиной волны***. Поверхности постоянной фазы называют «фронтами» волны. Скорость смещения каждого фронта определяется физикой процесса. Но нетрудно заметить, что условие $\omega t - kx + \varphi_0 = const$ эквивалентно уравнению $x(t) = \dfrac{\omega}{k} t + x_0$, то есть фронт гармонической волны перемещается со скоростью (которую называют ***фазовой скоростью*** волны) $V = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T}$. Это соотношение дает связь между фазовой скоростью, длиной волны и периодом, имеющее очень простой смысл: фронт волны за один период смещается на одну длину волны.

Пример 4: Поплавок, плавающий на поверхности воды, от какого-то толчка начал совершать вертикальные колебания с частотой $\nu = 4$. От него по воде побежали волны, расстояния между гребнями которых равнялось $\lambda = 15$см. Определите скорость движения этих гребней.
Решение: Гребни волн - это поверхности постоянной фазы, и скорость их распространения $V = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu = 0{,}6$ м/с.

На самом деле классификация волн существенно более сложная, чем классификация колебаний одного тела. Волны различаются по направлению колебаний (по отношению к направлению распространения волны): они разделяются на продольные (колебания вдоль направления распространения) и поперечные (естественно, поперек). Например, упругие волны деформаций в твердом теле могут быть как продольными, так и поперечными:



Кроме того, волны различают по форме волновых фронтов на плоские, цилиндрические, сферические и так далее.
Обычно нам легче представить себе волны на поверхности воды. Другими важными примерами волн являются звук (акустические волны – колебаний давления и плотности в веществе) и свет (электромагнитные волны – колебания напряженности электрического поля и индукции магнитного поля).

Задачи для школьников вплоть до 10 класса, посвященные волновым явлениям, обычно связаны с изучением соотношений между периодом, частотой, длиной волны и скоростью ее распространения. Также встречаются задания, связанные с анализом распределения энергии в волне. Несмотря на простоту некоторые из них могут быть достаточно интересны.

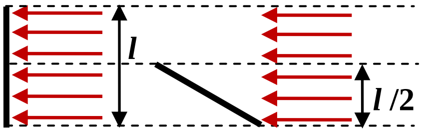
Пример 5: Робот оснащен датчиком освещенности, который измеряет световую энергию, попадающую в маленькое «входное окно» датчика за единицу времени. Источником света служит небольшая по размерам лампочка, испускающая свет одинаково во всех направлениях.

а) Сначала робот движется прямо на лампочку, и при этом датчик направлен на лампочку (то есть плоскость входного окна развернута перпендикулярно этому направлению). За пять секунд показания датчика увеличились в $n = 6{,}76$ раза. Во сколько раз за это время уменьшилось расстояние между датчиком и лампочкой?

б) Робот останавливается на некотором расстоянии от лампочки и начинает вращаться на месте. При каком направлении датчика (по отношению к лампочке) показания датчика во время этого вращения максимальны? Во сколько раз уменьшится измеряемая датчиком освещенность, если он повернется на угол 60° от этого направления?

Решение: а) Мощность излучения лампочки постоянна, и она светит одинаково во все стороны. Испущенная ею энергия равномерно распространяется по сферической поверхности волнового фронта. По мере удаления от лампочки площадь поверхности сферы растет пропорционально квадрату радиуса. Поэтому мощность излучения лампочки, регистрируемая датчиком (площадь «приемного» отверстия которого постоянна) на расстоянии r от нее, убывает обратно пропорционально r^2. Следовательно, расстояние между датчиком и лампочкой уменьшилось в $\sqrt{n} = 2{,}6$ раза.

б) Показания датчика максимальны, когда он направлен точно на лампочку. При повороте на угол 60° от этого направления показания уменьшаются в два раза. Объясним это. Ясно, что максимальное количество энергии в единицу времени попадает в датчик, когда плоскость входного окна развернута перпендикулярно направлению на лампочку. Нетрудно заметить, что при повороте на угол 60°

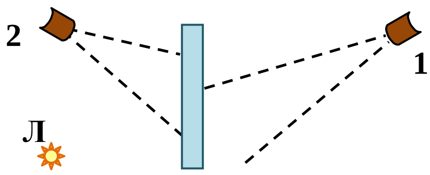


площадь участка фронта световой волны, лучи которого попадают в входное окно датчика, уменьшается именно в два раза (можно исходить из того, что катет, лежащий против угла в 30°, в два раза меньше гипотенузы, или из того, что высота в равностороннем треугольнике является медианой, или, наконец, из того, что $\cos(60^\circ) = 0{,}5$).

Пример 6: Робота можно снабдить датчиком, который может различать цвета. На самом деле световое излучение – это разновидность *электромагнитных волн*, причем разные цвета отличаются друг от друга *длиной волны* (это расстояние между двумя «гребнями» волны). В таблице приведена связь между длиной волны в нанометрах (1 нм = 10^{-9}м) и видимым цветом:

красный	оранжевый	желтый	зеленый	голубой	синий	фиолетовый
625–740 нм	590-625 нм	565-590 нм	500-565 нм	485-500 нм	440-485 нм	380-440

«Белый цвет» - это примерно равномерная смесь всех этих цветов. Например, радуга – оптическое явление, в котором солнечный цвет, преломляясь в каплях воды и отражаясь от них, разделяется на составляющие его цвета. Допустим, что мы изготовили пластину из специального сорта стекла, обладающего следующими характеристиками: электромагнитное излучение с длинами волн от 300 до 420 нм это стекло почти полностью отражает, с длинами волн от 420 до 620 нм – почти полностью поглощает (поглощенная энергия идет на нагрев стекла, а потом уходит в окружающую среду в виде невидимого теплового излучения), с длинами волн от 620 до 800 нм – почти полностью пропускает. По



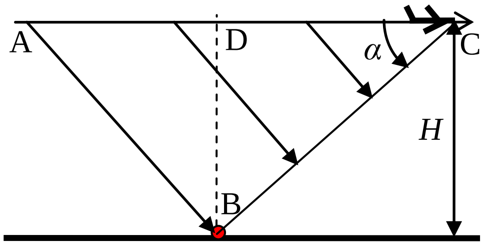
одну сторону от такой пластины размещена лампа Л (см. рисунок), светящая почти «белым» светом, а по другую – робот 1 с датчиком цвета (регистрирует всегда один из 7 цветов радуги – по тому, в каком из диапазонов длин волн поступает большая энергия). Пунктиром показаны границы области, в которой датчик «видит» объекты. Каким – по показаниям датчика – окажется цвет пластины? Каким будет цвет пластины по показаниям датчика, установленного на роботе 2?

Решение: Датчик на роботе 1 увидит соответствующий участок пластины красным. Дело в том, что до него доходит только свет лампы, прошедший через пластину, то есть с длинами волн от 620 до 800 нм, что в основном соответствует диапазону красного цвета (с небольшой примесью оранжевого). Датчик на роботе 2 увидит пластину фиолетовой, так как до него доходит только свет лампы, отраженный от пластины, то есть с длинами волн от 300 до 420 нм. Для видимого диапазона длин волн – только излучение фиолетового цвета.

Отметим, что форма волнового фронта существенно зависит от движения источника. Например, если источник звука почти покоится (скорость его движения намного меньше скорости звука), и испускает звук равномерно во все стороны, то волновые фронты звуковых волн будут сферическими. Если скорость движения источника станет заметной (то есть станет заметно, что он в каждый момент времени испускает почти сферическую волну, но из новой точки пространства), то наложение этих фронтов уже не даст сферу – фронты будут «вытянуты» вдоль направления движения. Если же источник движется со сверхзвуковой скоростью, то звук вообще не может убежать от источника «вперед» - вся возбуждаемая волна находится позади источника

Пример 7: Сверхзвуковой самолет пролетел точно над наблюдателем, а спустя время $t = 8$с наблюдатель услышал звук самолета. Известно, что скорость самолета в $n = 1{,}25$ раза превышает скорость звука в воздухе $V_0 \approx 330$м/с. На какой высоте летел самолет?

Решение: При движении самолета со сверхзвуковой скоростью фронт звуковой волны имеет форму конуса (его называют *конус Маха*). Разберем это обстоятельство. Заметим, что звук,



Испущенный самолетом в точке A, достигает точки B, где находится наблюдатель, за время t_1, а самолет за это время – точки C. При этом звук, испущенный в последующие моменты, тоже достигает прямой BC – это и есть фронт волны в вертикальной плоскости ниже траектории самолета. Угол наклона фронта к горизонтали α определяется соотношением величины скорости самолета V и скорости звука V_0: из треугольника ABC находим, что $\sin(\alpha) = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{V_0}{V} = \dfrac{1}{n}$. Кроме того, согласно условию самолет за время t пролетел от точки D до точки C, поэтому $|CD| = Vt = nV_0 t$, и из треугольника BCD: $H = |BD| = |CD|\, tg(\alpha) = nV_0 t \dfrac{1/n}{\sqrt{1-(1/n)^2}} = \dfrac{nV_0 t}{\sqrt{n^2-1}} = 4400$м.

Более сложные волновые явления, связанные с наложением волн одинаковой частоты, распространяющихся в одной области пространства, изучают в школе в 11 классе.