

**7-9 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Робофест» по физике**

**Теоретический обзор к вводному занятию «движение и равновесие зарядов в
электрическом поле».**

Если в некоторой области пространства существует электрическое поле, то на все заряженные тела, находящиеся в этой области, действует сила. Силы электростатического происхождения можно вычислить либо по известной напряженности электрического поля \vec{E} : сила, действующая на заряд q , равна $\vec{F} = q\vec{E}$, либо с помощью закона Кулона. Согласно этому закону, величина силы, с которой две неподвижные «точечные» заряженные частицы взаимодействуют между собой в вакууме, прямо пропорциональна произведению модулей их зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними: $|\vec{F}_{эл}| = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$

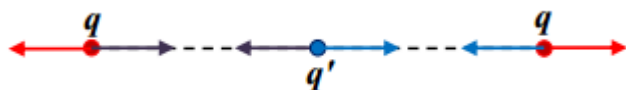
($k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$), причем силы взаимодействия зарядов направлены вдоль соединяющих их прямой, и являются силами притяжения для разноименных зарядов (знаки зарядов различны) и силами отталкивания – для одноименных (знаки одинаковы).

При решении задач об исследовании **равновесия** зарядов используется в основном условие равновесия сил: векторная сумма приложенных к покоящемуся телу сил (как электрических, так и другого происхождения) должна быть равна нулю: $\sum \vec{F} = 0$. Отметим, что на самом деле (этот результат нельзя доказать на «школьном» уровне) система заряженных тел не может находиться в **устойчивом** равновесии без участия «неэлектрических» сил – даже если мы подберем положение тел так, что электрические силы для всех тел уравнивают друг друга, малейшее отклонение тел от этих положений приведет к потере равновесия.

Пример 1: Три маленьких заряженных шарика расположены на одной прямой, так, что расстояние между «соседями» равно $r = 1 \text{ м}$. На крайние шарики нанесены одинаковые заряды $q = +2 \text{ мкКл}$. Какой заряд q' нужно нанести на центральный шарик, чтобы сумма сил, приложенных к каждому шарiku, равнялась нулю?

Решение: Во-первых, заметим, что центральный шарик явно должен иметь отрицательный заряд – иначе на крайние шарики действуют две сонаправленные силы отталкивания, и они для них сумма сил точно не будет равна нулю. При отрицательном на каждый шарик действуют две силы, направленные в разные стороны (см. рисунок, где тремя разными цветами показаны три пары сил взаимодействия для трех пар зарядов). Значит, для равновесия нам нужно потребовать, чтобы эти силы были равны по величине. Во-вторых, ясно, что сумма сил, приложенных к центральному шарiku, равно нулю независимо от величины его заряда, так как силы притяжения, действующие на него со стороны крайних шариков (одинакового заряда и размещенных на одинаковом расстоянии), равны по величине и противоположны по направлению. Таким образом, нам просто необходимо потребовать равенство величин сил притяжения и отталкивания, действующих на любой из крайних

шариков: $k \frac{q^2}{(2r)^2} = k \frac{q|q'|}{r^2} \Rightarrow |q'| = \frac{1}{4}q$, и $q' = -\frac{1}{4}q = -0,5 \text{ мкКл}$.



Легко выяснить, что такое равновесие является **неустойчивым**: при отклонении любого из шариков вдоль прямой, на которой они находятся, даже на очень малое расстояние, этот шарик начнет под действием электрических сил удаляться от положения равновесия. Например, если «чуть-чуть» сместить центральный шарик влево, то сила его притяжения к левому шарiku увеличится (так как расстояние между ними уменьшилось), а противодействующая ей сила притяжения к правому шарiku уменьшится (расстояние

увеличилось). Так что результирующая сила потянет центральный шарик еще дальше влево, и он притянется к левому шару, а правый шарик при этом улетит от этой пары.

Поэтому обычно рассматривают равновесие заряженного тела под действием электрических сил и сил другой природы.

Пример 2: Незаряженную каплю масла массой $m = 2,0$ нг помещают в вертикальную трубку, из которой откачан воздух, и облучают вспышкой ультрафиолетового излучения. После этого для того, чтобы подвесить каплю неподвижно, понадобилось создать в трубке электрическое поле с напряженностью $E \approx 2,45 \cdot 10^7$ В/м. Какой количество электронов было выбито ультрафиолетом из капли? Величина элементарного заряда $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, ускорение свободного падения считать равным $g \approx 9,8$ м/с².

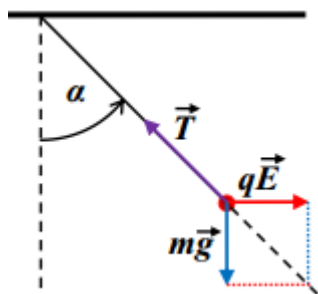
Решение: Ясно, что условие равновесия капли с зарядом q – то, что электрическая сила уравнивает силу тяжести, то есть $qE = mg$. Поэтому количество выбитых электронов

$$N = \frac{q}{e} = \frac{mg}{eE} = 5$$
 (обратите внимание, что 1 нг = 10^{-12} кг). Отметим, что равенство точное, так как число электронов должно быть целым, а точность данных задачи делает ошибку в этой величине на 1 слишком маловероятным. Также ясно, что заряд капли после выбивания электронов положителен, и поэтому вектор напряженности электрического поля направлен вертикально вверх.

Пример 3: В некоторой области пространства создано однородное горизонтальное электрическое поле, величина напряженности которого $|\vec{E}| = 50$ Н/Кл. Небольшой шарик с зарядом $q = +0,8$ мкКл и массой $m = 4$ мг подвешен на конце легкой непроводящей почти нерастяжимой нити, второй конец которой закреплен. Найдите угол α между нитью и вертикалью в состоянии равновесия. Чему в этом состоянии равна величина силы натяжения нити? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с².

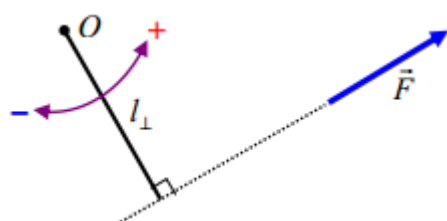
Решение: В положении равновесия сила натяжения нити уравнивает сумму электрической силы и силы тяжести (см. рисунок): $\vec{T} = -q\vec{E} - m\vec{g}$. Эта сила натяжения направлена вдоль нити, так что угол наклона нити к вертикали равен углу при катете mg в

треугольнике сил. Поэтому $tg(\alpha) = \frac{qE}{mg} = 1$, то есть $\alpha = 45^\circ$.



Ясно также, что сила натяжения нити $T = \sqrt{q^2 E^2 + m^2 g^2} \approx 5,66 \cdot 10^{-5}$ Н.

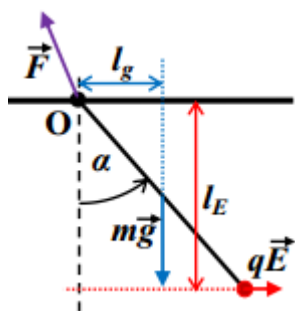
При решении задачи о равновесии протяженного тела нужно использовать не только условие равновесия сил, но и условие равновесия моментов: алгебраическая сумма моментов приложенных к телу сил равна нулю. Напомним, что моментом силы относительно оси О



называют произведение величины этой силы на ее плечо $M = \pm |\vec{F}| \cdot l_{\perp}$ (расстояние от О до линии действия силы – см. рисунок), взятое со знаком «+» или «-» в зависимости от направления вращения тела, которое сила пытается создать. Здесь мы выбираем одно из направлений (обычно против часовой стрелки), и считаем его положительным.

Пример 4: На одном конце однородного тонкого прямого непроводящего стержня с массой $m = 200\text{г}$ закреплен маленький легкий шарик с зарядом $q = 1\text{мКл}$. Другой конец стержня закреплен шарнирно на потолке (стержень может свободно вращаться вокруг шарнира в вертикальной плоскости). В области пространства, в которой находится стержень, создано однородное горизонтальное электрическое поле \vec{E} , величина напряженности которого $E = 500\text{В/м}$. Под каким углом к вертикали расположится стержень в положении равновесия? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10\text{м/с}^2$.

Решение: Стержень покоится под действием трех сил: электрической силы $q\vec{E}$, силы тяжести $m\vec{g}$ и силы реакции шарнира \vec{F} . Но в отличие от примера 3, нам необходимо учесть, что эти силы приложены к разным точкам стержня (см. рисунок). Как и в примере 3, векторная сумма этих сил равна нулю $\vec{F} + q\vec{E} + m\vec{g} = 0$, но теперь сила \vec{F} не обязательно направлена вдоль стержня, и из этого уравнения мы не можем определить угол наклона стержня. Здесь нам необходимо использовать условие равновесия моментов. Как видно из рисунка, электрическая сила пытается повернуть стержень вокруг шарнира (оси O) в положительном направлении (против часовой стрелки), а сила тяжести в отрицательном (по часовой стрелке). Плечо силы реакции шарнира равно нулю, и она не входит в уравнение моментов – ее момент равен нулю. Если длину стержня обозначить L , то плечо электрической силы $l_E = L\cos(\alpha)$. Сила тяжести приложена к центру однородного стержня, и ее плечо $l_g = \frac{L}{2}\sin(\alpha)$. Таким образом, условия равновесия моментов имеет вид $+qE \cdot L\cos(\alpha) - mg \frac{L}{2}\sin(\alpha) = 0$. Из этого уравнения находим, что $\text{tg}(\alpha) = \frac{2qE}{mg} \approx \frac{1}{2}$, и $\alpha \approx 27^\circ$.



Нетрудно заметить, что угол β наклона силы \vec{F} к вертикали определяется из условия $\text{tg}(\beta) = \frac{qE}{mg} = \frac{1}{4}$ ($\beta \approx 14^\circ$), и он меньше α ! То есть сила \vec{F} действительно не направлена вдоль стержня. Ее величина находится из условия равновесия сил: $|\vec{F}| = \sqrt{m^2 g^2 + q^2 E^2} \approx 2,06\text{ Н}$.

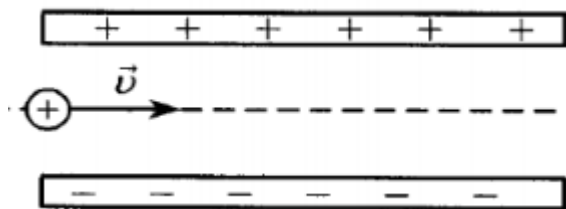
При изучении **движения** заряженных тел в электрическом поле можно использовать законы Ньютона. Однако, поскольку электрические силы зависят от положения тел, на уровне школьной программы вплоть до 9 класса мы можем проанализировать только две задачи:

- 1) Движение в однородном электрическом поле (электрическая сила постоянна) – для случая, когда другие силы отсутствуют или тоже постоянны. Тогда тело движется с постоянным ускорением.
- 2) Движение «точечного» тела по окружности в поле точечного заряда или шара, заряженного сферически симметрично. В этом случае модуль скорости тела постоянен, ускорение также по величине постоянно, причем скорость всегда направлена по касательной к окружности, а центростремительное ускорение – к центру окружности.

Пример 5: В невесомости, в вакуумированном пространстве находится конденсатор, обкладки которого – две плоские параллельные пластины. Протон влетает в конденсатор в

точке, расположенной посередине между пластинами, и его скорость в этой точке \vec{v}_0 направлена параллельно пластинам. Поле внутри конденсатора можно считать однородным с напряженностью $E = 30 \text{ кВ/м}$. Длина пластин конденсатора в направлении движения $L = 5 \text{ см}$, расстояние между пластинами $d = 5 \text{ мм}$. Найдите минимальную величину начальной скорости протона, при которой он может вылететь из конденсатора, не коснувшись пластин.

Удельный заряд протона $\frac{e}{m} \approx 9,6 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг}$.

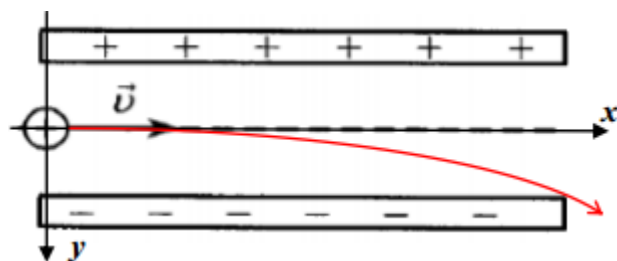


Решение: Введем оси x и y так, как показано на рисунке. Поле в конденсаторе направлено перпендикулярно пластинам (от положительно заряженной к отрицательно заряженной), поэтому по оси x протон движется равномерно: $x(t) = v_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0}$. По оси y протон движется

без начальной скорости с постоянным ускорением $a = \frac{eE}{m}$. Поэтому $y = \frac{eEt^2}{2m} = \frac{eEx^2}{2mv_0^2}$.

Протон пролетит конденсатор, не задев отрицательно заряженную пластину, если при $x = L$ будет выполнено требование $y < \frac{d}{2}$. Следовательно, $\frac{eEL^2}{2mv_0^2} < \frac{d}{2}$ и $v_0 > L\sqrt{\frac{eE}{md}}$. Значит,

минимально возможная скорость должна быть «чуть-чуть» больше $v_m = L\sqrt{\frac{eE}{md}} \approx 1200 \text{ км/с}$.



Пример 6: В вакууме в невесомости закреплен заряд $Q > 0$. Пылинка с зарядом $q < 0$ и массой m вращается вокруг него по окружности радиуса r . Найдите величину скорости пылинки.

Решение: При движении по окружности под действием силы, направленной по радиусу, величина ускорения материальной точки постоянна и равна $a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{r}$. Это ускорение

создается силой притяжения зарядов, поэтому $m\frac{v^2}{r} = \frac{kQ|q|}{r^2}$. Выражая скорость из этого

соотношения, получаем, что $v = \sqrt{\frac{kQ|q|}{mr}}$.

Для анализа всех остальных движений зарядов в электростатическом поле обычно используют не законы Ньютона, а законы сохранения. Особенно – закон сохранения энергии: напомним, что в приближении электростатики мы пренебрегаем потерями на излучение и используем выражение для потенциальной энергии заряда во внешнем поле через потенциал поля $E_{\text{пот}} = q \cdot \varphi(\vec{r})$, или выражение для работы поля через напряжение $A_{12} = q \cdot U_{12}$.

Пример 7: В вакууме закреплены два небольших шарика, по поверхности которых равномерно распределены одинаковые заряды $q = -30$ нКл. Расстояние между шариками равно $r = 60$ см. Из точки точно между ними стартует электрон – с очень маленькой начальной скоростью, направленной перпендикулярно линии, соединяющей центры шариков. Какую скорость наберет электрон к тому моменту, когда он пройдет путь, равный $s = 40$ см? Масса электрона $m \approx 9 \cdot 10^{-31}$ кг.

Решение: Электрон заряжен отрицательно ($q_e \equiv -e \approx -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл), так что он будет отталкиваться от обоих шариков и разгоняться. В силу симметрии расположения шариков относительно оси x , по которой стартовал электрон, он так и будет двигаться вдоль этой оси. Приращение его кинетической энергии равно работе электростатических сил, а работу можно

вычислить через потенциал: $\frac{mv_e^2}{2} = \Delta E_K = A_e = (-e) \cdot [\varphi(0) - \varphi(s)]$. Расстояние от электрона

до каждого из шариков в начале пути равно $\frac{r}{2}$, а в конце $\sqrt{\frac{r^2}{4} + s^2} = \frac{\sqrt{r^2 + 4s^2}}{2}$. Используя

формулу для потенциала точечного заряда для каждого из шариков, с учетом принципа

суперпозиции находим, что $\frac{mv_e^2}{2} = \frac{2k|q|e}{r} - \frac{2k|q|e}{\sqrt{r^2 + 4s^2}}$. Поэтому

$$v_e = 2 \sqrt{\frac{k|q|e}{m} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4s^2}} \right)} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ м/с. То есть } 4000 \text{ км/с.}$$

