10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Теоретический обзор к занятию к вводному занятию «закон сохранения импульса».

Основой для нахождения ответа на вопрос: «Как будет двигаться тело, участвующее в заданных взаимодействиях с другими телами?» - являются законы Ньютона. Главным образом – II закон. В ньютоновской механике для описания инертных свойств тел мы используем массу тела, а взаимодействия нашего тела с другими телами описываем с помощью векторных величин – сил. Тогда ускорение тела в каждый момент времени определяется как раз II законом: оно прямо пропорционально результирующей силе, приложенной к телу и обратно пропорционально его массе: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}_p}{m}$. Здесь результирующая сила – это векторная сумма всех сил, приложенных к телу. Наиболее простое «тело» в механике – тело, размерами и формой которого мы можем пренебречь при изучении его движения, то есть *материальная точка*. У такого тела мы не изучаем, например, вращение его частей по отношению к какой-то его выделенной точке – только движение тела как целого. Изучение поступательного движения протяженного тела тоже можно свести к изучению движения материальной точки – так как при таком движении все точки тела двигаются одинаково. Одной из важных величин, характеризующей состояние движения материальной точки является ее ***импульс*** – векторная величина, равная произведению массы на скорость точки: $\vec{p} \equiv m \cdot \vec{v}$. Более старое название этой величины – «количество движения», и оно является очень образным: именно импульс, а не скорость, показывает нам, насколько трудно остановить тело: для остановки очень тяжелого тела, движущегося даже с небольшой скоростью, нужно прикладывать значительные усилия в течение длительного времени. В самом деле, для маленького интервала времени Δt ускорение материальной точки $\vec{a} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, и поэтому изменение ее импульса за этот же интервал времени $\Delta \vec{p} = m \cdot \Delta \vec{v} = m \cdot \vec{a} \Delta t = \vec{F}_p \cdot \Delta t$. Величину $\vec{F} \cdot \Delta t$ часто называют «*импульсом силы*», и тогда наша выкладка означает, что ***изменение импульса материальной точки равно импульсу результирующей силы***. Для конечного интервала времени $T = t_{кон} - t_{нач}$ для нахождения изменения импульса нужно будет просуммировать все малые импульсы силы для малых интервалов времени. Заметим, что сразу записать $\Delta \vec{p} = \vec{F}_p \cdot T$ можно только для постоянной результирующей силы $\vec{F}_p = const$.

Пример 1. Небольшую шайбу запустили по горизонтальной шероховатой поверхности так, что вначале она двигалась со скоростью $v_0 = 6$м/с. За какое время T она полностью остановится, если коэффициент трения между шайбой и поверхностью $\mu = 0{,}3$? Ускорение свободного падения принять равным $g \approx 10$ м/с^2, движение шайбы от старта до остановки считать поступательным.

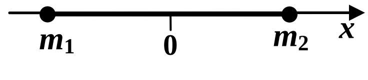
Решение: При поступательном движении шайбу вполне можно считать материальной точкой. Так как сила трения будет всегда направлена против скорости, то шайба будет двигаться вдоль прямой. Вдоль этой прямой направим координатную ось x, проекция начального импульса на которую равна $+mv_0$, (m – масса шайбы) а конечная – нулю. Проекция результирующей силы на эту ось определяется проекцией силы трения скольжения $F_x = -\mu N = -\mu mg$ (сила нормальной реакции горизонтальной поверхности $\vec{N}$ уравновешивает вертикальную силу тяжести $m\vec{g}$). Поэтому $0 - mv_0 = -\mu mgT$, то есть $T = \dfrac{v_0}{\mu g} \approx 2$ с.

Протяженные тела и системы тел можно рассматривать как *системы материальных точек*, мысленно разбивая каждое тело на «кусочки пренебрежимо малых размеров», взаимодействующие между собой. В этом случае для каждой такой системы материальных точек действующие на эти точки силы можно разбить на «внешние» (то есть действующие со стороны тел и материальных точек, не входящих в нашу систему) и «внутренние» (действующие со стороны материальных точек из нашей системы). В соответствии с III законом Ньютона, все внутренние силы разбиваются на «пары» (силы взаимодействия между выбранной парой точек), причем векторная сумма сил, действующих на *i*-ю точку со стороны *j*-ой ($\vec{F}_{ij}$) и на j -ю точку со стороны *i*-ой ($\vec{F}_{ji}$) равна нулю: $\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji}=0$. Значит, векторная сумма всех внутренних сил системы равна нулю. Поэтому, если ввести импульс всей системы как векторную сумму импульсов входящих в нее N материальных точек $\vec{P}\equiv\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$, то изменение импульса системы за малое время Δt будет равно $\Delta\vec{P}=\sum_{i=1}^{N}\Delta\vec{p}_i=\Delta t\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i^{(внеш)}+\vec{F}_i^{(внутр)})=\Delta t\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(внеш)}$, то есть оно определяется только внешними силами, действующими на точки системы. Если сумма внешних сил – постоянный вектор $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(внеш)}=\vec{F}_p=const$, то и для конечных времен $\Delta\vec{P}=\vec{F}_p\cdot T$.

Рассмотрим вопрос: можно ли рассмотреть движение протяженного тела или системы точек «как целого» как движение одной точки? И в этом случае ясно, что внутренние силы будут отвечать за смещение частей системы относительно друг друга и естественно связать движение системы «как целого» с действием внешних сил. С действием этих же сил связано изменение импульса всей системы. Так что мы построим описание движение системы «как целого», если свяжем полный импульс системы с импульсом какой-то «эффективной» материальной точки с массой, равной массе всей системы $M\equiv m_1+m_2+\ldots+m_N$: $\vec{P}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\ldots+m_N\vec{v}_N\equiv M\vec{V}$. Итак, скорость нужной нам точки $\vec{V}=\dfrac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\ldots+m_N\vec{v}_N}{m_1+m_2+\ldots+m_N}$. Поскольку $\vec{v}_i$ – это быстрота изменения координаты $\vec{r}_i$, то $\vec{V}$ – это скорость изменения координаты $\vec{R}\equiv\dfrac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_N\vec{r}_N}{m_1+m_2+\ldots+m_N}$. Эта координата определяет положение ***центра масс*** тела или системы материальных точек. Проще всего находить центр масс у однородных симметричных тел: центр масс всегда лежит на любой его оси симметрии и принадлежит любой его плоскости симметрии. Поэтому если у такого тела существует геометрический центр – единственная точка, через которую проходят все оси и плоскости симметрии, то эта точка и является центром масс тела.

Пример 2. На концах однородного длинного жесткого стержня массой $m=300$г прикреплены два маленьких шарика с массами $m_1=100$г и $m_2=200$г. Длина стержня $L=36$ см. На каком расстоянии от середины стержня находится центр масс этой системы?

Решение: В первую очередь заметим, что центр масс однородного стержня очевидно совпадает с его серединой. Введем координату *x*, отсчитываемую от середины стержня вдоль оси, направленной по стержню (см. рисунок). «Маленькие» шарики будем считать материальными точками с координатами $x_1=-L/2$ и $x_2=+L/2$. Ясно, что центр масс системы тоже лежит на оси *x* (это ось симметрии системы). В соответствии с введенным определением, $X=\dfrac{m_1(-L/2)+m_2(+L/2)+m\cdot 0}{m_1+m_2+m}=\dfrac{(m_2-m_1)L}{2(m_1+m_2+m)}=\dfrac{L}{12}=3$см. То есть центр масс находится на расстоянии 3 см от середины стержня, ближе к более тяжелому шарику.



Как видно, в любой момент времени импульс системы равен импульсу материальной точки с массой, равной полной массе системы, положение которой совпадает с положением центра масс. Это же относится и к *изменениям* импульса системы под действием внешних сил:

$\Delta\vec{P} = M \cdot \Delta\vec{V} = \Delta t \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(внеш)}$. Следовательно, ускорение центра масс $\vec{A} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(внеш)}$, и теперь нам ясно, почему удобно следить именно за центром масс: ***центр масс протяженного тела или системы тел движется точно так же, как двигалась бы материальная точка с массой, равной полной массе системы, под действием внешних сил, действующих на это тело (систему тел)***. Это – <u>теорема о движении центра масс</u>, и важно понимать, что она работает не только для поступательного, но и для произвольного движения тела или системы тел.

Пример 3. Однородный стержень длиной 10 см поместили в высокую колонну, из которой откачан воздух, там раскрутили в вертикальной плоскости до угловой скорости $\omega = 6$рад/с вокруг середины стержня, которая в процессе раскручивания оставалась неподвижной на высоте $H = 48{,}4$м над дном колонны. Затем стержень отпустили. Сколько оборотов совершит стержень до момента падения на дно колонны? Ускорение свободного падения $g \approx 9{,}8$м/с^2.

Решение: Единственная внешняя сила, действующая на стержень в описанных условиях – это сила тяжести. Поэтому центр масс (середина) стержня будет двигаться с постоянным ускорением g от нулевой начальной скорости. В момент удара стержня о дно колонны центр масс будет находиться на высоте не более 5 см над дном. Но так как 5 см намного меньше 48,4 м, этими 5 см можно пренебречь и считать, что время падения стержня до удара $t \approx \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Так как воздуха нет, а момент сил тяжести, действующих на стержень, равен нулю, то угловая скорость вращения стержня в процессе падения изменяться не будет. Следовательно, полный угол поворота стержня за время падения $\varphi \approx \omega\sqrt{\frac{2H}{g}}$. Число совершенных им оборотов $N = \frac{\varphi}{2\pi} \approx \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 6{,}002$. Итак, за время падения стержень совершит практически ровно 6 оборотов.

Договоримся называть ***замкнутыми*** в динамическом отношении системы материальных точек, у которых сумма внешних сил <u>равна нулю</u> ($\vec{F}_p = 0$). Ясно, что в этом случае полный импульс системы не будет изменяться с течением времени, так как для любого T получим, что $\Delta\vec{P} = 0$. Ясно, что, поскольку любое тело можно разбить на материальные точки, то этот вывод справедлив и для любой системы взаимодействующих тел (замкнутой механической системы). Итак:

Полный импульс замкнутой механической системы остается неизменным в процессе движения: $\vec{P}_{нач} = \vec{P}_{кон}$.

Это утверждение называют «законом сохранения импульса».

Пример 4: Комочек пластилина скользил по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0, и столкнулся с лежащим на поверхности неподвижно комочком, масса которого была в два раза больше, чем у него. В результате столкновения два комочка слиплись, и получившийся новый комок пластилина продолжил движение по той же поверхности поступательно. Найти его скорость.

Решение: На гладкой поверхности сил трения нет, а сила нормальной реакции поверхности для любого комочка уравновешивает силу тяжести (по вертикали все комочки не движутся). Поэтому сумма внешних сил, приложенных к системе из двух комочков равна нулю. Импульс системы до удара в проекции на ось движения первого комочка равен $+mv_0$ (m – масса первого комочка). После удара импульс системы в проекции на эту ось должен остаться таким же, а в проекции на перпендикулярную ось – равным нулю (образовавшийся комок продолжит движение вдоль той же оси). Так как масса «составного» комка пластилина после удара равна $3m$, то его скорость V находится из соотношения $mv_0 = 3mV$, то есть $V = \frac{1}{3}v_0$.

Отметим, что сохранение импульса системы означает постоянство скорости ее центра масс: действительно, при получаем. Итак: ***центр масс замкнутой механической системы либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно***.

Интересный пример использования закона сохранения импульса – реактивное движение, когда одно из тел («ракета») набирает скорость, «выбрасывая» массивные тела.

Пример 5: Фигурист массой $M = 70$кг скользит по прямой спиной вперед по гладкому льду со скоростью $v_0 = 0{,}5$ м/с, держа в руках ядро массой $m = 5$кг. Внезапно он бросает ядро в направлении, противоположном его направлению движения, придав ему скорость $u = 4{,}5$ м/с относительно себя. С какой скоростью v он продолжит движение после броска?

Решение: Пренебрежем силой трения, действующей на коньки фигуриста на гладком льду и силой сопротивления воздуха. Сила нормальной реакции льда уравновешивает сумму сил тяжести, действующих на фигуриста и ядро, поэтому в процессе броска (до самого момента отпускания ядра фигуристом) систему «фигурист + ядро» можно считать замкнутой. Отметим, что проекция скорости ядра в момент отпускания на ось движения фигуриста равна $v - u$ (обратите внимание, что скорость фигуриста растет в процессе отталкивания ядра, и к моменту прекращения контакта с ядром уже имеет «конечное» значение), и поэтому закон сохранения импульса в проекции на эту ость дает: $(M + m)v_0 = m(v - u) + Mv$, откуда следует, что $v = v_0 + \frac{m}{M + m}u = 0{,}8$ м/с.

Увеличение импульса фигуриста можно считать результатом действия на него силы отдачи от ядра, или «*реактивной силы*». Для случая «непрерывного» выбрасывания массы, когда за малое время Δt выбрасывается малая масса Δm, то следует написать, что $\Delta p_ф = M(v - v_0) = M\frac{\Delta m}{M + \Delta m}u = F_{реак} \cdot \Delta t$. Поскольку для «бесконечно малых времен» $\Delta t \to 0$ и $M + \Delta m \to M$, то «мгновенное» значение реактивно силы $F_{реак} = \frac{\Delta m}{\Delta t}u$. Эта сила направлена против скорости $\vec{u}$, и реактивную силу (силу тяги реактивного двигателя) следует считать равной $\vec{F}_{реак} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \vec{u}$. Таким образом, ее величина равна произведению «скорости потери массы» (или *расхода* реагентов сгорания, в результате которого образуется реактивная струя) $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ на «скорость выбрасывания массы», или *скорость истечения* u.

Значит, если ракета выбрасывает реактивную газовую струю со скоростью 1 км/с, расходуя на ее образования 5 кг топлива и окислителя в секунду, то действующая на нее реактивная сила равняется 5000 Н. Правда, при описании движения ракеты нужно будет учесть, что масса ракеты постоянно уменьшается, так что ее ускорение будет расти даже при постоянной реактивной силе.

Пример 6: Вертолет массой $M = 800$кг завис неподвижно над поверхностью Земли. Лопасти его главного винта отбрасывают вниз 200 кг воздуха за каждую секунду (вспомогательный винт отбрасывает воздух в горизонтальном направлении). С какой скоростью движется вниз этот воздух? Ускорение свободного падения принять равным $g \approx 10$ м/с^2.

Решение: В описанной ситуации именно вертикальная компонента реактивной силы, действующей со стороны отбрасываемого воздуха на главный винт, уравновешивает силу тяжести, действующую на вертолет (горизонтальную компоненту этой силы уравновешивает реактивная сила, действующая на вспомогательный винт). Таким образом, $Mg = \frac{\Delta m}{\Delta t} u$, то есть $u = \frac{Mg}{\Delta m / \Delta t} = 40$ м/с.